Tehtävä 1

a)

$z = 2 + 2i$ jolloin $|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ ja $\arg(z) = \arctan(2/2) = \pi/4$, tällöin $z = 2\sqrt{2}e^{\pi i/4}$. Vastaavasti $w = -3 + 3i$, josta $|w| = 3\sqrt{2}$, $\arg(w) = \arctan(3/(-3)) = 3\pi/4$, jolloin $w = e^{3\pi i/4}$.

Nyt saadaan $\bar{z}\bar{w} = -12$ ja $\bar{z}/\bar{w} = 2i/3$.

b)

Kysymyksessä on Möbius-kuvaus, joka kuvaa ympyrän joko suoraksi tai ympyräksi. Lasketaan pisteiden i, 1 ja -1 kuvat, joiksi saadaan 0, $-i$ ja i, josta voidaan päätellä, että yksikköympyrän kuva on imaginaariakseli.

Tehtävä 2

a)

Nyt on, kun $z \neq 0$: $0 = \mathrm{Re}(1 + 2/z) = 1 + 2\mathrm{Re}(1/z) = 1 + 2\mathrm{Re}(\bar{z}/z\bar{z}) = 1 + \frac{2}{|z|^2}\mathrm{Re}(\bar{z})$, ja kun $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$, niin saadaan yhtälö $|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) = 0$ eli $|z+1|^2 = 1$, joka on ympyrä keskipisteenään -1 ja säteenään 1, mutta piste $z = 0$ ei kuulu joukkoon. Tehtävä voidaan aivan hyvin ratkaista myös kirjoittamalla z muotoon $z = x + iy$

b)

Kootaan vektorit matriisin vaakariveiksi, jolloin rivioperaatioilla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

josta nähdään, että vektoriavaruuden dimensio on Rank $= 2$ ja sen eräs kanta on $(1, 2, -1, 1)$ ja $(0, 0, -6, -2)$.

Tehtävä 3

Yhtälöryhmää kuvaava matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 0 & c \\ 2 & 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

saadaan Gaussin rivioperaatioilla muotoihin

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & -12 & c-28 \\ 0 & 9 & -12 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & -12 & c-28 \\ 0 & 0 & 0 & 23-c \end{bmatrix}$$

josta saadaan:

Jotta olisi ratkaisu, oltava $23 - c = 0$ eli $c = 23$, jolloin yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja. Koska kerroinmatriisin determinantti on nolla, niin yhtälöryhmällä ei ole millään c :n arvolla täsmälleen yhtä ratkaisua. Jos $c \neq 23$, niin yhtälöryhmälle ei ole yhtään ratkaisua.

Tehtävä 4

a)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$0 = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$, josta ominaisarvot $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = 2$. Näitä vastaavat ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$, josta ominaisvektorit $\mathbf{v}_1 = (-2, 1)^T$ ja $\mathbf{v}_2 = (1, -1)^T$. Muodostetaan matriisit $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ ja $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ eli

$$V = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pätee $A = V \Lambda V^{-1}$, josta

$$A^8 = V \Lambda^8 V^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^8 & 0 \\ 0 & 2^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13378 & -13634 \\ -6817 & 6049 \end{bmatrix}$$

b)

Jos olisi $\lambda = 0$, niin $0 = \det(A - \lambda I) = \det(A)$, jolloin A ei olisi säännöllinen, eli $\lambda \neq 0$. Yhtälöstä $Ax = \lambda x$ seuraa kertomalla vasemmalta A^{-1} :llä ja jakamalla yhtälö λ :lla yhtälö $A^{-1}x = (1/\lambda)x$, josta väite seuraa.

Pisteytys:

1a)	3p
1b)	3p
2a)	3p
2b)	3p
3	3p Gaussin eliminaatiosta + 1p jokaisesta alakohdasta
4a)	4p
4b)	2p