Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Malinen – Salin – Laiho

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

2. välikoe 8.11.2004

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. (a) Määritä raja-arvo $\lim_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{x+5h}-\sqrt{x}}$.

   (b) Osoita Bolzanon merkinvaihtolauseen (the intermediate value theorem) avulla, että yhtälöllä
   $$x^3 - 5x + 3 = 0$$
   on kolme erisuurta reaalista juurta.

2. a) Etsi käyrän $x \sin(xy - y^2) = x^2 - 1$ tangentin yhtälö pisteessä $(1, 1)$.

   b) Osoita, että funktiolla $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ on käänteisfunktio, ja määritä se. Mikä on tämän käänteisfunktion määrittelyjoukko?

3. a) Määritä differentiaaliyhtälön
   $$y'' - 4y' + 4y = 0$$
   yleinen ratkaisu.

   b) Ratkaise alkuarvotehtävä
   $$y'' - 3y' - 10y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

4. a) Palauta jousimassasysteemiä kuvaava differentiaaliyhtälö
   $$y'' + 5y' + 6y = 0 \tag{1}$$
   matriisimuotoon $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$. Etsi tämän 2×2 matriisin A ominaisarvot λ_1 ja λ_2. Osoita että ne ovat differentiaaliyhtälön (1) karakteristisen polynomin nollakohtia.

   b) Ratkaise vakionvariointikaavaa käyttämällä differentiaaliyhtälö
   $$x'(t) + 2x(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t \in [0, 1], \\ 0, & \text{kun } t > 1 \end{cases}$$
   alkuehdolla $x(0) = 0$.