Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Malinen, Laiho

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

1. välikoe 11.10.2004

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. (a) Määritä lukujen $z = 2 + 2i$ ja $w = -3 + 3i$ polaariesitykset ($re^{i\theta}$) ja laske niiden avulla $\bar{z}\bar{w}$ ja $\bar{z}/\bar{w}$.

   (b) Mikä on joukon $\{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$ kuva kuvauksessa $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$?

2. a) Mille kompleksitason pisteille $z \in \mathbb{C}$ on voimassa yhtälö

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{2}{z}\right) = 0?$$

   b) Määritä vektoreiden $(1, 2, -1, 1)$, $(3, 6, -9, 1)$ ja $(2, 4, -5, 1)$ virittämän vektoriavaruuden dimensio ja määritä jokin kanta tälle vektoriavaruudelle käyttäen Gaussin algoritmia.

3. Millä vakion c arvoilla yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 7 \\ 4x + y &= c \\ 2x + 5y - 6z &= 9 \end{cases}$$

   on

   a) äärettömän monta ratkaisua,
   b) täsmälleen yksi ratkaisu,
   c) ei yhtään ratkaisua?

4. a) Laske $A^8 = AAAAAAAA$ diagonalisoimalla A, kun $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   b) Neliömatriisi A olkoon säännöllinen (ts. käänteismatriisi A^{-1} on olemassa). Olkoon λ matriisin A ominaisarvo ja $\mathbf{x} \neq 0$ sitä vastaava ominaisvektori. Osoita että $\lambda \neq 0$. Osoita että käänteismatriisilla A^{-1} on ominaisarvo $1/\lambda$, ja sitä vastaava ominaisvektori on $\mathbf{x}$.