Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Arponen/Malinen

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

2. välikoe 10.11.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. (a) Olkoon $f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-2}$, kun $x \neq 2$. Miten $f(2)$ on valittava, jotta $f(x)$ on jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$?

   (b) Etsi käyrän $y^2(2-x) = x^3$ tangentin yhtälö pisteessä $(1,1)$.

   Ratkaisu: (a) Kun $x \neq 2$, niin

   $$f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-2} = \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x+1}.$$

   Joten $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{3}$, eli valitaan $f(2) = \frac{1}{3}$.

   (b) Nähdään, että $1^2(2-1) - 1^3 = 0$. Joten piste $(1,1)$ on tällä käyrällä. Implisiittisesti derivoimalla saadaan

   $$2y(x)y'(x)(2-x) - y(x)^2 = 3x^2.$$

   Koska $y(1) = 1$, niin $2y'(1) - 1 = 3$. Josta kulmakertoimeksi $y'(1) = 2$. Tangentin yhtälö on $y - 1 = 2(x-1)$, eli $y = 2x - 1$.

2. (a) Määritä raja-arvo

   $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right).$$

   (b) Olkoon $f''(a) = 10$. Määritä raja-arvo

   $$\lim_{t\to 0} \frac{f'(a+\alpha t) - f'(a+\beta t)}{t}.$$

   Ratkaisu: (a) Olkoon $f(x) = \sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}$. Laventamalla $f(x)$ lausekkeella $\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}$, saadaan

   $$f(x) = \frac{x^2+ax-x^2-bx}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}} = \frac{(a-b)x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}} + \sqrt{1+\frac{b}{x}}\right)}.$$

   Tästä nähdään, että $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a-b}{2}$.

   (b) Muokataan lauseketta

   $$\frac{f'(a+\alpha t) - f'(a+\beta t)}{t} = \frac{f'(a+\alpha t) - f'(a) + f'(a) - f'(a+\beta t)}{t} =$$
   $$\alpha\frac{f'(a+\alpha t) - f'(a)}{\alpha t} - \beta\frac{f'(a+\beta t) - f'(a)}{\beta t}.$$

Toisen derivaatan määritelmän nojalla

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = f''(a),$$

joten kysytty raja-arvo on $\alpha f''(a) - \beta f''(a) = 10(\alpha - \beta)$.

3. (a) Mikä on differentiaaliyhtälön $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0$ yleinen ratkaisu?

   (b) Etsi differentiaaliyhtälön $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = t$ ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $x(0) = 1$ ja $x'(0) = -1$.

Ratkaisu: (a) Karakteristinen yhtälö on $r^2 + 4r + 4 = 0$, jonka ratkaisu on $r = -2$ (kaksoisjuuri), joten homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $x_h(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$.

(b) Erikoisratkaisuyrite on muotoa $x_p(t) = at + b$. Derivoimalla ja sijoittamalla yhtälöön, saadaan $a = -b = \frac{1}{4}$. Yleinen ratkaisu epähomogeeniselle yhtälölle on $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}$. Tämän derivaatta: $x'(t) = -2Ae^{-2t} + Be^{-2t} - 2Bte^{-2t} + \frac{1}{4}$. Alkuehdoista seuraa: $x(0) = A - \frac{1}{4} = 1$ ja $x'(0) = -2A + B + \frac{1}{4} = -1$. Tämän yhtälöparin ratkaisuksi $A = \frac{5}{4}$ ja $B = \frac{5}{4}$. Joten $x(t) = \frac{5}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}te^{-2t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}$.

4. (a) Ratkaise alkuarvotehtävä: $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(\mathbf{t})$, $\mathbf{x}(0) = [3, 1]^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   (b) Ratkaise alkuarvotehtävä: $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, $\mathbf{x}(0) = [3, 1]^T$, missä A kuten (a)-kohdassa ja $\mathbf{f}(t) = e^{2t}[1, -1]^T$.

Ratkaisu: (a) Diagonalisoidaan $A = VDV^{-1}$. Ominaisarvoyhtälöstä $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4 = 0$ saadaan $\lambda_1 = 2$ ja $\lambda_2 = -2$. Vastaavaviksi ominaisvektoreiksi $x_1 = [3, 1]^T$ ja $x_2 = [1, -1]^T$. Joten on saatu

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

ja tällöin

$$e^{tA} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Yhtälösysteemin ratkaisuksi saadaan $\mathbf{x}(t) = e^{tA}[3, 1]^T = ... = e^{2t}[3, 1]^T$.

(b) Käyttämällä vakionvariointikaavaa

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{2(t-v)} + e^{-2(t-v)} & 3e^{2(t-v)} - 3e^{-2(t-v)} \\ e^{2(t-v)} - e^{-2(t-v)} & e^{2(t-v)} + 3e^{-2(t-v)} \end{bmatrix} e^{2v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} dv.$$

Integroimalla saadaan $x_1(t) = \frac{13}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$ ja $x_2(t) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}$.