Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Malinen, Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

1. välikoe 13.10.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. (a) Määritä yhtälön $z^4 = 1 - i$ kaikki ratkaisut.

   (b) Määritä yksikköympyrän $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ kuva kuvauksessa

$$f(z) = \frac{2z-1}{2-z}.$$

Ratkaisu: (a) Käytetään polaariesitystä, jolloin saadaan $(re^{i\phi})^4 = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2\pi n)}$. Ratkaisemalla tästä: $r = 2^{1/8}$, sekä kulmiksi; $\phi_1 = -\frac{\pi}{16}$, $\phi_2 = \frac{7\pi}{16}$, $\phi_3 = \frac{15\pi}{16}$ ja $\phi_4 = \frac{23\pi}{16}$.

(b) Laskemalla: $f(1) = 1$, $f(i) = \frac{-4+3i}{5}$ ja $f(-1) = -1$. Nähdään, että kuvapisteet ovat myös yksikköympyrällä $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Koska Möbius kuvaus kuvaa suorat ja ympyrät suorille tai ympyröille, niin vastaus on yksikköympyrä.

2. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Mikä on yhtälöryhmän kerroinmatriisin rangi? Voidaanko parametrit α, β ja γ valita siten, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua? Perustele vastauksesi!

Ratkaisu: Gaussittamalla saadaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & -1 & -2 & 2 & \beta \\ 3 & 2 & -1 & 1 & \gamma \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 & -3 & 3\alpha \\ 0 & -5 & -5 & 5 & 2\beta - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma - 2\beta - 2\alpha \end{bmatrix}.$$

Tästä nähdään, että kerroinmatriisin rangi on kaksi, ja että valitsemalla $\gamma \neq \alpha + \beta$, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

3. (a) Tarkastellaan yhtälöryhmää:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix},$$

kun α ja β ovat reaalilukuja. Millä α:n ja β:n arvoilla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua?

(b) Olkoon matriisit A ja B symmetrisiä neliömatriiseja. Osoita, että AB on symmetrinen jos ja vain jos A ja B kommutoivat eli $AB = BA$.

Ratkaisu: (a) Tutkitaan aluksi tilannetta $\alpha = 0$. Tällöin $\det A = 2 \neq 0$, joten A on kääntyvä ja ratkaisu on olemassa. Olkoon nyt $\alpha \neq 0$, jolloin Gaussittamalla saadaan (olet. $\alpha \neq -3$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} \alpha & -3 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha+3 & -\alpha-1 & 2\alpha-1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1+\frac{3\alpha+3}{\alpha+3} & \alpha\beta-1-\frac{6\alpha-3}{\alpha+3} \end{bmatrix}.$$

Nähdään, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, kun $\alpha^2 - 1 + \frac{3\alpha+3}{\alpha+3} = 0$ ja $\alpha\beta - 1 - \frac{6\alpha-3}{\alpha+3} \neq 0$. Edellisellä yhtälöllä on kolme ratkaisua: $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ ja $\alpha = -2$. Tapaus $\alpha = 0$ tutkittiin jo. Kun $\alpha = -1$, niin sijoittamalla epäyhtälöön saadaan $\alpha\beta - 1 - \frac{6\alpha-3}{\alpha+3} = -\beta + \frac{7}{2} \neq 0$. Joten tällöin $\beta \neq \frac{7}{2}$. Kun $\alpha = -2$, niin sijoittamalla epäyhtälöön saadaan $\alpha\beta - 1 - \frac{6\alpha-3}{\alpha+3} = -2\beta + 14 \neq 0$. Joten tällöin $\beta \neq 7$.

Tutkitaan vielä lopuksi tapaus $\alpha = -3$. Tällöin kerroinmatriisin determinantti $\det A = 2 \neq 0$, eli ratkaisu on olemassa.

Siis vastaus: joko $\alpha = -1$ ja $\beta \neq \frac{7}{2}$ tai $\alpha = -2$ ja $\beta \neq 7$.

(b) Oletetaan $A = A^T$ ja $B = B^T$. Osoitetaan kahdessa vaiheessa:

(1) ('$\Rightarrow$') Jos $(AB) = (AB)^T$, niin matriisin laskusäännöistä ja oletuksista seuraa $(AB) = B^T A^T = BA$.

(2) ('$\Leftarrow$') Jos $AB = BA$, niin matriisin laskusäännöistä ja oletuksista seuraa $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$.

4. (a) Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laske A^n.

(b) Tutki ja piirrä käyrä $x^2 + 4xy + y^2 = 8$.

Ratkaisu: (a) Ominaisarvoyhtälöstä $\det A - \lambda I = 0$ saadaan $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Tämän ratkaisut $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = -1$. Vastaavat normeeratut ominaisvektorit ovat $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ ja $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$. Joten on diagonalisoitu $A = VDV^{-1}$, missä

$$V = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tällöin $A^n = VD^nV^{-1}$, josta kertomalla saadaan

$$A^n = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n + (-1)^{n+1} \\ 3^n + (-1)^{n+1} & 3^n + (-1)^{n+2} \end{bmatrix}.$$

(b) (a)-kohdan nojalla ominaisarvot erimerkkiset, joten kyseessä on hyperbeli. Uusien koordinaattien (u,v) avulla $3u^2 - v^2 = 8$. Koordinaatistojen välillä pätee:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

u-akselin yhtälöksi saadaan $(v = 0)$ $y = x$. v-akseli on tätä vastaan kohtisuorassa, siis $y = -x$. Asymptootit saadaan uv-koordinaatistossa ratkaisemalla yhtälö $3u^2 - v^2 = (\sqrt{3}u - v)(\sqrt{3}u + v) = 0$. Piirrettynä kuva näyttää seuraavalta: