Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Malinen, Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

1. välikoe 13.10.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. (a) Määritä yhtälön $z^4 = 1 - i$ kaikki ratkaisut.

   (b) Määritä yksikköympyrän $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ kuva kuvauksessa

$$f(z) = \frac{2z-1}{2-z}.$$

2. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

   Mikä on yhtälöryhmän kerroinmatriisin rangi? Voidaanko parametrit α, β ja γ valita siten, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua? Perustele vastauksesi!

3. (a) Tarkastellaan yhtälöryhmää:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix},$$

   kun α ja β ovat reaalilukuja. Millä α:n ja β:n arvoilla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua?

   (b) Olkoon matriisit A ja B symmetrisiä neliömatriiseja. Osoita, että AB on symmetrinen jos ja vain jos A ja B kommutoivat, eli $AB = BA$.

4. (a) Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Laske A^n.

   (b) Tutki ja piirrä käyrä $x^2 + 4xy + y^2 = 8$.