TKK, Matematiikan laitos — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti 2.9.2002

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Kaavat $\sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$ ja $\cos(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$ määrittelevät trigonometriset funktiot sini ja kosini kun z on kompleksiluku. Laske näiden avulla $\sin(\pi + \mathrm{i}\pi)$ ja $\cos(\mathrm{i}3\pi)$.

(b) Olkoon $w = -1 + \mathrm{i}$. Määritä yhtälön $\mathrm{e}^z = w$ kaikki ratkaisut, eli määritä kaikki funktion $\ln(w)$ arvot.

Ratkaisu: (a) Määritelmän mukaan

$$\sin(\pi + \mathrm{i}\pi) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\mathrm{i}\pi)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi+\mathrm{i}\pi)}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{-\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(-\mathrm{e}^{-\pi} + \mathrm{e}^{\pi}\right) = \frac{1}{\mathrm{i}}\sinh(\pi) = -\mathrm{i}\sinh(\pi) \approx -\mathrm{i}\,11.54873936, \tag{1}$$

koska $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -1$.

Lisäksi

$$\cos(\mathrm{i}3\pi) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}^2 3\pi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}^2 3\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-3\pi} + \mathrm{e}^{3\pi}\right) = \cosh(3\pi) \approx 6195.823952.$$

(b) Kompleksiluvun w itseisarvo on $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, ja w:n argumentti on $\arctan(\frac{1}{-1}) + \pi = \frac{3}{4}\pi$. (tässä lisättiin π koska $\mathrm{Re}\, w < 0$). Jos $z = a + \mathrm{i}b$ niin $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^a$ ja $\arg(\mathrm{e}^z) = b$, joten jos nyt $\mathrm{e}^z = w$ niin $\mathrm{e}^a = \sqrt{2}$ ja $b = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n$ missä n on kokonaisluku. Tästä seuraa, että $a = \ln(\sqrt{2}) = 0.34657$ jolloin haetut ratkaisut ovat

$$z = 0.34657 + \mathrm{i}(\tfrac{3}{4}\pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

---

2. Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Laske $\det(A)$.

(b) Ratkaise yhtälöryhmä $Ax = b$.

(c) Laske A:n ominaisarvot.

Ratkaisu: (a) Määritelmän mukaan $\det(A)$ on

$$\det(A) = 3 \cdot 10 - 6 \cdot 3 = 30 - 18 = 12.$$

(b) Cramerin säännöllä saadaan

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{10 - 12}{12} = -\frac{1}{6} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{6 - 3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Gaussin algoritmilla saadaan

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 - r_1 \\
\sim &\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad r_1 \leftarrow r_1 - \tfrac{3}{2} r_2 \\
\sim &\begin{bmatrix} 3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 \leftarrow \frac{1}{3} r_1 \\ r_2 \leftarrow \frac{1}{4} r_1 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Näinkin todetaan, että $x_1 = -\frac{1}{6}$ ja $x_2 = \frac{1}{4}$.

(c) A:n ominaisarvot lasketaan ratkaisemalla karakteristinen yhtälö

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 6 \\ 3 & (10-\lambda) \end{vmatrix} = (3-\lambda)(10-\lambda) - 18 = \lambda^2 - 13\lambda + 12 = 0,$$

josta saadaan

$$\lambda = \frac{13 \pm \sqrt{169-48}}{2} = \frac{13 \pm 11}{2} = \begin{cases} 12, \\ 1. \end{cases}$$

Ominaisarvot ovat siis 12 ja 1.

---

3. Funktiosta f tiedetään, että $1{,}85 \leq f(1) \leq 1{,}90$ ja että $-\frac{3}{2} \leq f'(x) \leq -1$ kaikilla x. Määritä mahdollisimman lyhyt väli $[a, b]$ siten, että funktiolla f on nollakohta tällä välillä, tai selitä miksi tällainen väli ei välttämättä ole olemassa.

Ratkaisu: Olkoon (mahdollinen) nollakohta x_0. Väliarvolauseen nojalla

$$f'(a)(x_0 - 1) = f(x_0) - f(1) = -f(1),$$

missä a on pisteen 1 ja x_0 välillä. Näin ollen

$$x_0 - 1 = -\frac{f(1)}{f'(a)},$$

josta seuraa, että

$$-\frac{1{,}85}{-\frac{3}{2}} \leq x_0 - 1 \leq -\frac{1{,}90}{-1},$$

eli

$$1{,}233333 \leq x_0 - 1 \leq 1,9,$$

joten

$$2{,}23333 \leq x_0 \leq 2{,}9.$$

4.

(a) Määritä integraalille $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{f(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x$ ylä- ja alaraja, kun tiedetään, että $x \leq f(x) \leq -1$ kun $x \leq -2$.

(b) Laske integraalille $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x+2}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ approksimaatio käyttämällä suunnikassääntöä ja neljää osaväliä.

Ratkaisu: (a) Kun $-3 \leq x \leq -2$ niin $\frac{1}{x+1} < 0$ joten

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{f(x)}{x+1} \leq -\frac{1}{x+1}, \quad -3 \leq x \leq -2.$$

Näin ollen integraalin ylärajaksi saadaan

$$\int_{-3}^{-2} \frac{f(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x \leq \int_{-3}^{-2} \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-2} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \Big/_{-3}^{-2} (x - \ln|x+1|) = -2 - \ln(1) + 3 + \ln(2) = 1 + \ln(2).$$

Alarajaksi tulee taas

$$\int_{-3}^{-2} \frac{f(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x \geq \int_{-3}^{-2} \frac{-1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-2} \left(-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \Big/_{-3}^{-2} (-\ln|x+1|) = -\ln(1) + ln(2) = \ln(2).$$

Näin ollen

$$\ln(2) \leq \int_{-3}^{-2} \frac{f(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x \leq 1 + \ln(2).$$

(b) Nyt $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = 0.25$ joten suunnikasmenetelmän mukaisesti lasketaan

$$T_4 = \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\Big),$$

missä $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x}$ ja $x_j = 1 + j \cdot 0.25$, $j = 0, 1, \ldots, 4$. Silloin saadaan

$$T_4 = \frac{0.25}{2}\Big(1.5 + 2 \cdot 1.1556 + 2 \cdot 0.93333 + 2 \cdot 0.77922 + 0.66667\Big) = 0.98786.$$

---

5. Taso kulkee pisteiden $(1, 0, 2)$ ja $(-1, 1, 0)$ kautta ja on kohtisuorassa tasoa $x+y+z = 3$ vastaan (eli tasojen normaalit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan). Määritä tason yhtälö.

Ratkaisu: Pisteestä $(1, 0, 2)$ pisteeseen $(-1, 1, 0)$ kulkeva vektori $\mathbf{a} = (-1-1)\mathbf{i} + (1-0)\mathbf{j} + (0-2)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ on tason suuntainen, jolloin tason normaali $\mathbf{n}$ on kohtisuorassa tätä vektoria vastaan. Toisaalta $\mathbf{n}$ on myös kohtisuorassa tasoa $x+y+z=3$ vastaan, eli kohtisuorassa sen normaalia $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vastaan. Näin ollen voidaan valita

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (-2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix}-2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\mathbf{k} = (1+2)\mathbf{i}-(-2+2)\mathbf{j}+(-2-1)\mathbf{k} = 3\mathbf{i}-3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Yhtä hyvin voidaan normaaliksi valita $\mathbf{i}-\mathbf{k}$. Koska taso kulkee pisteen $(1,0,2)$ kautta saadaan sen yhtälöksi

$$1\cdot(x-1)+0\cdot(y-0)-1\cdot(z-2)=0,$$

eli

$$x-z=-1.$$