TKK, Matematiikan laitos — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti 2.9.2002

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Kaavat $\sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$ ja $\cos(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$ määrittelevät trigonometriset funktiot sini ja kosini kun z on kompleksiluku. Laske näiden avulla $\sin(\pi + \mathrm{i}\pi)$ ja $\cos(\mathrm{i}3\pi)$.

(b) Olkoon $w = -1 + \mathrm{i}$. Määritä yhtälön $\mathrm{e}^z = w$ kaikki ratkaisut, eli määritä kaikki funktion $\ln(w)$ arvot.

2. Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Laske $\det(A)$.
(b) Ratkaise yhtälöryhmä $Ax = b$.
(c) Laske A:n ominaisarvot.

3. Funktiosta f tiedetään, että $1{,}85 \le f(1) \le 1{,}90$ ja että $-\frac{3}{2} \le f'(x) \le -1$ kaikilla x. Määritä mahdollisimman lyhyt väli $[a, b]$ siten, että funktiolla f on nollakohta tällä välillä, tai selitä miksi tällainen väli ei välttämättä ole olemassa.

4.

(a) Määritä integraalille $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{f(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x$ ylä- ja alaraja, kun tiedetään, että $x \le f(x) \le -1$ kun $x \le -2$.

(b) Laske integraalille $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x+2}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ approksimaatio käyttämällä suunnikassääntöä ja neljää osaväliä.

5. Taso kulkee pisteiden $(1, 0, 2)$ ja $(-1, 1, 0)$ kautta ja on kohtisuorassa tasoa $x+y+z = 3$ vastaan (eli tasojen normaalit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan). Määritä tason yhtälö.