TKK, Matematiikan laitos Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti tai välikokeen uusinta 21.1.2002

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

Välkikoe 1: Tehtävistä 1-4 on valittava 3.
Välkikoe 2: Tehtävistä 5-8 on valittava 3.
Välkikoe 3: Tehtävistä 9-12 on valittava 3.
Tentti: Tehtävistä 1, 2, 5, 8, 10 ja 12 on valittava 5.

1.

(a) Esitä kompleksiluku $\frac{2-\overline{w}}{-2+w}$ muodossa $a+\mathrm{i}b$ kun $w=3-\mathrm{i}$.
(b) Määritä joukon $\{\, z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z<0 \,\}$ kuva kuvauksessa $z\mapsto \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$.

Ratkaisu: (a) Koska $\overline{w}=\overline{3-\mathrm{i}}=3+\mathrm{i}$ niin

$$\frac{2-\overline{w}}{-2+w}=\frac{2-3-\mathrm{i}}{-2+3-\mathrm{i}}=\frac{(-1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1+1}=\frac{-1-\mathrm{i}2+1}{2}=-\mathrm{i}.$$

(b) Joukon $\{\, z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z<0 \,\}$ reuna on reaaliakseli $\{\, z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z=0 \,\}$ joten lasketaan funktion $f(z)=\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ arvot esimerkiksi pisteissä $z=-1$, $z=0$ ja $z=1$. Tämän lisäksi on syytä laskea funktion f arvo myös esimerkiksi pisteessä $x=-\mathrm{i}$. Nyt saadaan

$$\begin{array}{ll}
z & f(z) \\
-1 & \dfrac{-1-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-1-\mathrm{i})^2}{2}=\mathrm{i}, \\
0 & \dfrac{0-\mathrm{i}}{0+\mathrm{i}}=-1, \\
1 & \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{2}=-\mathrm{i}, \\
-\mathrm{i} & \dfrac{-\mathrm{i}-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}+\mathrm{i}}=\dfrac{-\mathrm{i}2}{0}=\infty.
\end{array}$$

Koska tiedetään että suoran, tässä tapauksessa siis reaaliakselin, kuva tässä kuvauksessa on joko suora tai ympyrä niin todetaan, että koska i, -1 ja $-\mathrm{i}$ ovat kuvapsiteitä, niin kyseessä on origokeskinen ympyrä $|w|=1$ jonka säde siis on 1. Koska pisteen $-\mathrm{i}$ kuva on ääretön niin joukon $\{\, z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z<0 \,\}$ kuva on joukko $\{\, w\in\mathbb{C} \mid |w|>1 \,\}$.

2.

(a) Onko $n\times n$ matriisi A aina kääntyvä (eli A^{-1} on olemassa) jos löytyy $n\times n$ matriisi B siten, että $AB=C$ missä $C(i,j)=1$ kun $i\le j$ ja $C(i,j)=0$ kun $i>j$? Perustele!
(b) Onko $n\times n$ matriisi A, joka ei ole nolla-matriisi, aina kääntyvä (eli A^{-1} on olemassa) jos löytyy $n\times n$ matriisi B siten, että $ABA=A$? Perustele!

Ratkaisu: (a) Ehto $C(i,j)=0$ kun $i>j$ tarkoittaa, että C:n alkiot lävistäjän alapuolella ovat 0, jolloin siis C:n determinantti on lävistäjäalkioiden tulo ja tässä tapauksessa kaikki lävistäjäalkiot ovat 1 joten $\det(C) = 1$. Nyt $\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(C) = 1$ josta seuraa, että $\det(A) \neq 0$ ja A on kääntyvä.

(b) Matriisi A ei välttämättä ole kääntyvä koska jos esimerkiksi

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

koska silloin $ABA = A$ mutta A ei ole kääntyvä koska $\det(A) = 0$.

---

3. Määritä vektoreiden $(1, 2, -1, 3)$, $(-2, -4, 4, -10)$, $(2, 4, 4, -6)$ ja $(-1, -2, 3, -7)$ virittämän vektoriavaruuden jokin kanta sekä tämän avaruuden dimensio.

Ratkaisu: Kirjoitetaan vektorit matriisin vaakavektoreina jolloin saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -10 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

Tähän matriisiin sovelletaan Gaussin algoritmia, ja saadaan

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -10 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & -7 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + r_1 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 - 3r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_2 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Koska haetaan vaakavektoreiden virittämän avaruuden kanta, ja koska tukialkioit sijaitsevat vaakariveillä 1 ja 2, niin kantavektoreiksi voidaan valita vastaavat vaakavektorit porrasmuotisesta matriisista, jolloin kannaksi saadaan $(1, 2, -1, 3)$ ja $(0, 0, 2, -4)$. Koska kannassa on 2 vektoria, niin dimensio on 2.

Jos kirjoitetaan vektorit matriisin pystyvektoreina niin saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & -10 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

Tähän matriisiin sovelletaan Gaussin algoritmia, ja saadaan

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & -10 & -6 & -7 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 3r_1 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & -12 & -4 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftrightarrow r_4 \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -12 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_3 \leftarrow r_3 + \tfrac{1}{2} r_2 \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Koska haetaan pystyvektoreiden virittämän avaruuden kanta, ja koska tukialkioit sijaitsevat pystysarakkeilla 1 ja 2, niin kantavektoreiksi voidaan valita vastaavat pystyvektorit alkuperäisestä matriisista, jolloin kannaksi saadaan $(1, 2, -1, 3)$ ja $(-2, -4, 4, -10)$ ja dimensioksi saadaan tietenkin taas 2.

---

4. Tutki ja piirrä käyrä $17x^2 - 12xy + 8y^2 = 20$.

Ratkaisu: Muodostetaan ensin neliömuodon matriisi, joka on

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan seuraavaksi tämän matriisin ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} (17-\lambda) & -6 \\ -6 & (8-\lambda) \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0.$$

Tästä saadaan ratkaisuksi,

$$\lambda = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4} - 100} = \begin{cases} 20, \\ 5, \end{cases}$$

joten nähdään, että ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 20$ ja $\lambda_2 = 5$.

Seuraavaksi lasketaan ominaisarvoon $\lambda_1 = 20$ liittyvä ominaisvektori, eli ratkaistaan yhtälö $(A - 20I)X = 0$. Gaussin menetelmällä saadaan,

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -6 & -12 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\
\sim &\begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tästä nähdään, että jos valitaan $x_2 = 1$ niin x_1:n ratkaisuksi yhtälöstä $-3x_1 - 6 = 0$ saadaan $x_1 = -2$. Ominaisvektoriksi voidaan siis valita $[-2, 1]^{\mathrm{T}}$, tai koska halutaan, että sen pituus on 1, $X_1 = [-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}]^{\mathrm{T}}$. Ominaisarvoon $\lambda_2 = 5$ liittyvä ominaisvektori on kohtisuorassa vektoria X_1 vastaan, joten voidaan valita $X_2 = [-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}]^{\mathrm{T}}$. Ominaisvektoreista muodostetaan matriisi

$$V = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

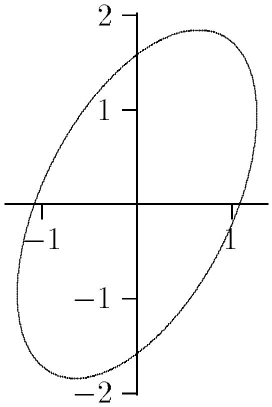
Uudet koordinaatit x' ja y' määritellään kaavalla

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Koska V on valittu ortogonaaliseksi niin $17x^2 - 12xy + 8y^2 = 20x'^2 + 5y'^2$. Uudessa koordinaattisysteemissä yhtälö on siis

$$20x'^2 + 5y'^2 = 20.$$

Koska uudet x'- ja y'-koordinaattiakselit ovat ominaisvektoreiden suuntaisia, niin käyrä näyttää suunnilleen tällaiselta:



---

5. Määritä raja-arvot (mikäli ne ovat olemassa)

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{f(x-x^2) - 1 - x^2}$ jos tiedetään, että $f(t) = 1 + t^2 + O(t^4)$ (kun $t \to 0$).

Ratkaisu: (a) Koska $|\sin(t)| \le 1$ niin

$$\left|\frac{\sin(x^2)}{x}\right| \le \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

ja koska $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = 0$ niin saadaan kuristusperiaatteen nojalla $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0$.

(b) Koska $\sin(t) = t + O(t^3)$ ja $f(t) = 1 + t^2 + O(t^4)$ niin

$$(1)\quad \frac{\sin(x^3)}{f(x-x^2) - 1 - x^2} = \frac{x^3 + O((x^3)^3)}{1 + (x-x^2)^2 + O((x-x^2)^4) - 1 - x^2}$$
$$= \frac{x^3 + O(x^9)}{x^2 - 2x^3 + x^4 + O(x^4) - x^2} = \frac{1 + O(x^6)}{-2 + O(x)},$$

joten voidaan päätellä, että

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{f(x-x^2)-1-x^2} = \frac{1+0}{-2+0} = -\frac{1}{2}.$$

---

6. Osoita, että $\ln(1+x) \le x$ kaikilla $x > -1$ käyttäen esimerkiksi Taylorin kehitelmää.
Ratkaisu: Taylorin kehitelmän mukaan

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(t)\frac{x^2}{2},$$

missä t on jokin luku 0:n ja x:n välillä (kunhan x on sellainen että f on kaksi kertaa derivoituva välillä $[0, x]$ tai $[x, 0]$ jos $x < 0$). Tässä tapauksessa $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ ja $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \le 0$ kun $x > -1$. Näin ollen $f''(t) < 0$ kun $x > -1$ ja saadaan

$$f(x) \le f(0) + f'(0)x = x.$$

---

7. Ratkaise likimääräisesti yhtälö $x^2 - x^3 - 1 = 0$ Newtonin menetelmällä, siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-3}. Alkuarvona voit käyttää $x_0 = -1$. Voidaanko alkuarvoksi valita $x_0 = 0$?
Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x^2 - x^3 - 1$, jolloin $f'(x) = 2x - 3x^2$. Newtonin menetelmän mukaan on silloin laskettava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^2 - {x_n}^3 - 1}{2x_n - 3{x_n}^2}.$$

Jos valitaan $x_0 = -1$, niin saadaan:

$$\begin{aligned} x_0 &= -1.00000 \\ x_1 &= -0.80000 \\ x_2 &= -0.75682 \\ x_3 &= -0.75488 \end{aligned}$$

Koska $f(x_3) = 7.5 \cdot 10^{-6} > 0$ ja $f(x_3 + 10^{-3}) = -0.0032 < 0$ niin nähdään merkinvaihtolauseen nojalla, että $x_3 = -0.75488$ kelpaa haetuksi likiarvoksi.

Alkuarvoksi ei voida valita $x_0 = 0$ koska $f'(0) = 0$ eikä voida laskea x_1.

---

8. Tiedetään, että funktio f on jatkuvasti derivoituva ja että $f(-1) = 2$ ja $f'(x) \ge x^2 - 5$ kun $x \le 0$. Mitä voidaan sanoa funktion f arvosta pisteessä $x = -4$.
Ratkaisu: Nyt

$$\int_{-4}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x = \Big/_{-4}^{-1} f(x) = f(-1) - f(-4),$$

joten

$$f(-4) = f(-1) - \int_{-4}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Koska $f(-1)=2$ ja $f'(x)\geq x^2-5$ kun $x\in[-4,-1]$ niin

$$(2)\quad f(-4)\leq 2-\int_{-4}^{-1}(x^2-5)\,\mathrm{d}x = 2-\Big/_{-4}^{-1}\left(\frac{1}{3}x^3-5x\right)$$
$$= 2-\frac{(-1)^3}{3}+5\cdot(-1)+\frac{(-4)^3}{3}-5\cdot(-4)=-4.$$

---

9. Määritä funktion $f(t)=\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-3t}$ Laplace-muunnos, eli laske integraal $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t$. Millä (kompleksiluvun) z arvoilla pätee, että $\int_0^\infty |\mathrm{e}^{-zt}f(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$?

Ratkaisu:

(3)
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty\left(\mathrm{e}^{-(z+1)t}-2\mathrm{e}^{-(z+3)t}\right)\,\mathrm{d}t=\Big/_0^\infty\left(-\frac{1}{z+1}\mathrm{e}^{-(z+1)t}+\frac{2}{z+3}\mathrm{e}^{-(z+3)t}\right)$$
$$=-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{z+1}\mathrm{e}^{-(z+1)t}+\frac{1}{z+1}+\lim_{t\to\infty}\frac{2}{z+3}\mathrm{e}^{-(z+3)t}-\frac{2}{z+3}$$
$$=\frac{1}{z+1}-\frac{2}{z+3},$$

koska $\mathrm{e}^{-(z+1)0}=\mathrm{e}^{-(z+3)0}=1$ ja $\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(z+1)t}=\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(z+3)t}=0$ jos $\operatorname{Re}z>-1$.

Jos $\operatorname{Re}z>-1$ niin $|\mathrm{e}^{-zt}f(t)|\leq \mathrm{e}^{-(\operatorname{Re}z+1)t}+\mathrm{e}^{-(\operatorname{Re}z+3)t}$ ja koska $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\,dt<\infty$ kun $a>0$ niin $\int_0^\infty|\mathrm{e}^{-zt}f(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$. Jos $\operatorname{Re}z\leq -1$ niin $\lim_{t\to\infty}|\mathrm{e}^{-zt}f(t)|\geq 1$ ja silloin $\int_0^\infty|\mathrm{e}^{-zt}f(t)|\,\mathrm{d}t=\infty$.

---

10. Määritä integraalin $\int_0^2\sqrt{x+x^3}\,\mathrm{d}x$ likiarvo käyttäen Simpsonin menetelmää ja 4 yhtä pitkää osaväliä. Onko odotettavissa, että jos neljän osavälin sijasta käytetään n osaväliä, niin virhe on $O(n^{-4})$ kun $n\to\infty$. (Perustele!)

Ratkaisu: Nyt $h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{4}=0.5$ joten Simpsonin menetelmän mukaisesti lasketaan
$$S_4=\frac{h}{3}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\Big),$$
missä $f(x)=\sqrt{x+x^3}$ ja $x_j=0+j\cdot 0.5$, $j=0,1,\ldots,4$. Silloin saadaan
$$S_4=\frac{0.5}{3}\Big(0+4\cdot 0.79057+2\cdot 1.4142+4\cdot 2.2079+3.1623\Big)=2.9975.$$

Simpsonin menetelmässä virhe käyttäytyy kuten $O(n^{-4})$, eli virheen itseisarvo on korkeintaan Cn^{-4}, olettaen, että n on neljä kertaa derivoituva ja neljäs derivaatta on rajoitettu. Tässä tapauksessa jo ensimmäinen derivaatta kasvaa äärettömyyteen kun $x\to 0+$, joten ei ole odotettavissa, että jos neljän osavälin sijasta käytetään n osaväliä, niin virhe olisi $O(n^{-4})$ kun $n\to\infty$

---

11. Määritä origon etäisyys tasojen $x+y+z=0$ ja $2x-y-5z=3$ leikkaussuorasta.

Ratkaisu: Haetaan ensin jokin leikkausuoran piste ja koska mikä tahansa suoran piste kelpaa, voidaan valita $z = 0$ jolloin yhtälösysteemiksi tulee

$$x + y = 0$$
$$2x - y = 3.$$

Laskemalla yhteen saadaan $3x = 3$ eli $x = 1$ jolloin seuraa, että $y = -1$. Leikkaussuoran suuntavektori saadaan laskemalla tasojen normaalien ristitulo, koska suuntavektori on molempien tasojen suuntainen eli kohtisuorassa molempien tasojen normaalia vastaan. Suuntavektoriksi tulee siis

$$\mathbf{v} = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(2\mathbf{i}-\mathbf{j}-5\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & (-1) & (-5) \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (-1) & (-5) \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & (-5) \end{vmatrix}$$
$$+ \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & (-1) \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1\cdot(-5) - 1\cdot(-1)) - \mathbf{j}(1\cdot(-5) - 1\cdot 2)$$
$$+ \mathbf{k}(1\cdot(-1) - 1\cdot 2) = -4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Pisteen $(0, 0, 0)$ etäisyys tästä suorasta on

$$\frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|},$$

missä $\mathbf{r}_0 = 0$ ja $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ jolloin siis

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)\times\mathbf{v} = (-\mathbf{i}+\mathbf{j})\times(-4\mathbf{i}+7\mathbf{j}-3\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (-1) & 1 & 0 \\ (-4) & 7 & (-3) \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & (-3) \end{vmatrix}$$
$$- \mathbf{j}\begin{vmatrix} (-1) & 0 \\ (-4) & (-3) \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} (-1) & 1 \\ (-4) & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1\cdot(-3) - 0\cdot 7)$$
$$- \mathbf{j}((-1)\cdot(-3) - 0\cdot(-4)) + \mathbf{k}((-1)\cdot 7 - 1\cdot(-4)) = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Etäisyydeksi tulee siis

$$\frac{\sqrt{9+9+9}}{\sqrt{16+49+9}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{74}}.$$

---

12. Funktio $f(x)$ tunnetaan pisteissä $x_j = 0 + \frac{j}{N}$, $j = 0, 1, 2, \dots, 10N$. Miten N olisi valittava jos halutaan , että virhe olisi korkeintaan 10^{-4} kun approksimoidaan funktiota $f(x)$ välillä $[0, 1]$ käyttäen lineaarista interpolointia, (eli jokaisella välillä $[x_{j-1}, xj]$ funkio f korvataan korekintaan astetta yksi olevalla polynomilla joko yhtyy f:n arvoihin pisteissä x_{j-1} ja x_j), ja kun tiedetään, että $|f'(x)| \leq 4$, $f''(x) \leq 8$ ja $f''(x) \geq -12$ kun $x \in [0, 10]$.

Ratkaisu: Koska käytetään lineaarista interpolointia, niin interpoloinnin virhekaavan mukaan virhe välillä $[x_{j-1}, x_j]$ on

$$\frac{f''(t)}{2}(x - x_{j-1})(x - x_j),$$

missä $x_{j-1} \leq t \leq x_j$ kun $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Nyt

$$|f''(t)| \leq 12$$

Koska $(x-x_{j-1})(x-x_j)$ on suurimmillaan kun $x=(x_{j-1}+x_j)/2$ jolloin $(x-x_{j-1})(x-x_j) = \frac{1}{4}(x_j-x_{j-1})^2 = \frac{1}{4N^2}$, niin virheen ylärajaksi saadaan $\frac{3}{2N^2}$ ja

$$\frac{3}{2N^2} < 10^{-4} \quad \text{kun} \quad N \geq 123.$$
