TKK, Matematiikan laitos Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti tai välikokeen uusinta 21.1.2002

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

Välkikoe 1: Tehtävistä 1-4 on valittava 3.
Välkikoe 2: Tehtävistä 5-8 on valittava 3.
Välkikoe 3: Tehtävistä 9-12 on valittava 3.
Tentti: Tehtävistä 1, 2, 5, 8, 10 ja 12 on valittava 5.

1.
(a) Esitä kompleksiluku $\frac{2-\overline{w}}{-2+w}$ muodossa $a + \mathrm{i}b$ kun $w = 3 - \mathrm{i}$.
(b) Määritä joukon $\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0 \}$ kuva kuvauksessa $z \mapsto \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$.

2.
(a) Onko $n \times n$ matriisi A aina kääntyvä (eli A^{-1} on olemassa) jos löytyy $n \times n$ matriisi B siten, että $AB = C$ missä $C(i,j) = 1$ kun $i \leq j$ ja $C(i,j) = 0$ kun $i > j$? Perustele!
(b) Onko $n \times n$ matriisi A, joka ei ole nolla-matriisi, aina kääntyvä (eli A^{-1} on olemassa) jos löytyy $n \times n$ matriisi B siten, että $ABA = A$? Perustele!

3. Määritä vektoreiden $(1,2,-1,3)$, $(-2,-4,4,-10)$, $(2,4,4,-6)$ ja $(-1,-2,3,-7)$ virittämän vektoriavaruuden jokin kanta sekä tämän avaruuden dimensio.

4. Tutki ja piirrä käyrä $17x^2 - 12xy + 8y^2 = 20$.

5. Määritä raja-arvot (mikäli ne ovat olemassa)
(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}$,
(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{f(x-x^2) - 1 - x^2}$ jos tiedetään, että $f(t) = 1 + t^2 + O(t^4)$ (kun $t \to 0$).

6. Osoita, että $\ln(1+x) \leq x$ kaikilla $x > -1$ käyttäen esimerkiksi Taylorin kehitelmää.

7. Ratkaise likimääräisesti yhtälö $x^2 - x^3 - 1 = 0$ Newtonin menetelmällä, siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-3}. Alkuarvona voit käyttää $x_0 = -1$. Voidaanko alkuarvoksi valita $x_0 = 0$?

8. Tiedetään, että funktio f on jatkuvasti derivoituva ja että $f(-1) = 2$ ja $f'(x) \geq x^2 - 5$ kun $x \leq 0$. Mitä voidaan sanoa funktion f arvosta pisteessä $x = -4$.

9. Määritä funktion $f(t) = \mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-3t}$ Laplace-muunnos, eli laske integraal $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t$. Millä (kompleksiluvun) z arvoilla pätee, että $\int_0^\infty |\mathrm{e}^{-zt} f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$?

10. Määritä integraalin $\int_0^2 \sqrt{x + x^3}\,\mathrm{d}x$ likiarvo käyttäen Simpsonin menetelmää ja 4 yhtä pitkää osaväliä. Onko odotettavissa, että jos neljän osavälin sijasta käytetään n osaväliä, niin virhe on $O(n^{-4})$ kun $n \to \infty$. (Perustele!)

11. Määritä origon etäisyys tasojen $x + y + z = 0$ ja $2x - y - 5z = 3$ leikkaussuorasta.

12. Funktio $f(x)$ tunnetaan pisteissä $x_j = 0 + \frac{j}{N}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, 10N$. Miten N olisi valittava jos halutaan , että virhe olisi korkeintaan 10^{-4} kun approksimoidaan funktiota $f(x)$ välillä $[0, 1]$ käyttäen lineaarista interpolointia, (eli jokaisella välillä $[x_{j-1}, xj]$ funkio f korvataan korekintaan astetta yksi olevalla polynomilla joko yhtyy f:n arvoihin pisteissä x_{j-1} ja x_j), ja kun tiedetään, että $|f'(x)| \leq 4$, $f''(x) \leq 8$ ja $f''(x) \geq -12$ kun $x \in [0, 10]$.