TKK, Matematiikan laitos Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
2. välikoe 12.11.2001

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Määritä raja-arvo $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}})}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}$, mikäli se on olemassa.

(b) Funktiosta f tiedetään, että $f(1) \le 3$, $f(4) \le 2$ ja $|f'(x)| \le 2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Seuraako tästä, että $f(2) \le 5$? Perustele!

2.

(a) Jos oletetaan, että f on kaksi kertaa derivoituva, positiivinen ja konveksi funktio jollakin välillä (a, b), niin seuraako tästä, että $\sqrt{f(x)}$ on konveksi tällä välillä? Entä $f(x)^2$? Perustele!

(b) Määritä funktion $\ln(1+\sin(x))$ astetta 3 oleva Taylorin polynomi pisteessä $a = 0$. Voit käyttää hyväksesi tietoa, että $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$ ja $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$.

3. Hae likimääräisesti yhtälön $x^2\cos(x) + \mathrm{e}^{-x} = 0$ jokin ratkaisu Newtonin menetelmällä siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-3}. Alkuarvona voit käyttää $x_0 = 2$. Montako ratkaisua tällä yhtälöllä kaiken kaikkiaan on? (Perustele lyhyesti!)
Huom! *Muista käyttää radiaaneja laskimessasi!*

4.

(a) Mikä integraali saadaan laskettavaksi jos integraalissa $\displaystyle\int_3^8 \frac{t+1}{\sqrt{\frac{t}{2+t}}+1}\,\mathrm{d}t$ tehdään sijoitus $\sqrt{\frac{t}{2+t}} = x$? Tätä uutta integraalia ei tarvitse laskea.

(b) Osoita, että $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1 + 2\ln(1-\frac{x}{2}) + x + x^2}\,\mathrm{d}x \ge \ln(\sqrt{2})$, käyttämällä hyväksi epäyhtälöä $\ln(1+t) \le t$, kun $t > -1$.