TKK, Matematiikan laitos — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

1. välikoe 15.10.2001

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Osoita induktiolla, että jos $q \neq 1$ niin

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad n \geq 0.$$

(Oletetaan, että $q^0 = 1$ myös jos $q = 0$.)

(b) Olkoon $w = -1 + \mathrm{i}\,2$. Määritä yhtälön $\mathrm{e}^z = w$ kaikki ratkaisut, eli määritä kaikki funktion $\ln(w)$ arvot.

Ratkaisu: (a) Tarkistetaan ensin, että yhtälö pätee kun $n = 0$. Vasen puoli on $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$ ja oikea puoli on $\frac{1-q}{1-q} = 1$.

Oletetaan seuraavaksi, että yhtälö pätee kun $n = m \geq 0$. Silloin

$$\sum_{k=0}^{m+1} q^k = \sum_{k=0}^{m} q^k + q^{m+1} \overset{\text{induktio-oletus}}{=} \frac{1-q^{m+1}}{1-q} + q^{m+1}$$
$$= \frac{1-q^{m+1}+q^{m+1}-q^{m+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(m+1)+1}}{1-q}$$

jolloin todetaan, että väite pätee myös kun $n = m+1$. Induktioperiaatteen nojalla saadaan nyt väite kaikilla $n \geq 0$.

(b) Kompleksiluvun w itseisarvo on $|w| = \sqrt{1^2+2^2} = 2.236$, ja w:n argumentti on $\arctan(\frac{2}{-1}) + \pi = 2.034$ (tässä lisättiin π koska $\operatorname{Re} w < 0$). Jos $z = a + \mathrm{i}b$ niin $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^a$ ja $\arg(\mathrm{e}^z) = b$, joten jos nyt $\mathrm{e}^z = w$ niin $\mathrm{e}^a = 2.236$ ja $b = 2.034 + 2\pi n$ missä n on kokonaisluku. Tästä seuraa, että $a = \ln(2.236) = 0.8047$ jolloin haetut ratkaisut ovat

$$z = 0.8047 + \mathrm{i}(2.034 + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

---

2. Millä parametrin a arvoilla on yhtälösysteemillä

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2x_2 & +(2a-1)x_3 & = & 1 \\ -5x_1 & +11x_2 & +(4-10a+a^2)x_3 & = & -2 \\ -2x_1 & +5x_2 & +(1-4a+2a^2)x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & -6x_2 & +(5a-a^2)x_3 & = & -2 \end{array}$$

on äärettömän monta, täsmälleen yksi, tai ei yhtään ratkaisua? Kun ratkaisuja löytyy, määritä ne Gaussin algoritmin avulla. Voidaanko jo sen perusteella että yhtälösysteemissä on 4 yhtälöä ja 3 tuntematonta sanoa mitään ratkaisujen lukumäärästä?

Ratkaisu: Gaussin algoritmilla saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & (-1+2a) & 1 \\ -5 & 11 & (4-10a+a^2) & -2 \\ -2 & 5 & (1-4a+2a^2) & 5 \\ 2 & -6 & (5a-a^2) & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 + 5r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + 2r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & (-1+2a) & 1 \\ 0 & 1 & (-1+a^2) & 3 \\ 0 & 1 & (-1+2a^2) & 7 \\ 0 & -2 & (2+a-a^2) & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 + 2r_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & (-1+2a) & 1 \\ 0 & 1 & (-1+a^2) & 3 \\ 0 & 0 & a^2 & 4 \\ 0 & 0 & (a+a^2) & 2 \end{bmatrix}$$

Jos $a^2 = 0$, eli $a = 0$ niin kolmas rivi sisältää ristriidan $0 = 4$. Samoin jos $a + a^2 = 0$ eli $a = -1$ (tai $a = 0$) niin neljäs rivi sisältää ristiriidan $0 = 2$. Jos $a \neq 0$ niin saadaan rivioperaatiolla $r_4 \leftarrow r_4 - (\frac{1}{a} + 1)r_3$ matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & (-1+2a) & 1 \\ 0 & 1 & (-1+a^2) & 3 \\ 0 & 0 & a^2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & (2-4(\frac{1}{a}+1)) \end{bmatrix}$$

Tästäkin seuraa ristiriita, ellei $2 - 4(\frac{1}{a} + 1) = 0$ eli $a = -2$. Näin ollen yhtälösysteemillä ei ole ratkaisuja jos $a \neq -2$.

Kun $a = -2$ niin porrasmuotoinen matriisi on

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolmannen rivin mukaan $4x_3 = 4$, eli $x_3 = 1$. Toisen rivin mukaan $x_2 + 3x_3 = 3$, eli $x_2 = 0$ ja ensimmäisen rivin mukaan $x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 1$ eli $x_1 = 6$. Siis, kun $a = -2$ niin ainoa ratkaisu on $x_1 = 6$, $x_2 = 0$ ja $x_3 = 1$.

Jos yhtälösysteemin oikealla puolella olisi ollut nollia, niin arvolla $a = 0$ olisi saatu äärettömän monta ratkaisua, joten kun systeemissä on 4 yhtälöä ja 3 tuntematonta ei voida sanoa mitään yleistä ratkaisujen lukumäärästä (joka aina on 0, 1 tai ∞).

3.

(a) Olkoon $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. Laske A:n determinantti. Löytyykö reaalinen matriisi B siten, että $B^2 = A$? Perustele!

(b) Olkoon A symmetrinen $n \times n$ matriisi siten, että $A^2 = A$. Osoita, että silloin pätee $(X - AX)^{\mathrm{T}} AX = 0$ kaikilla $n \times 1$ pystyvektoreilla X. (Tämä merkitsee sitä, että kuvaus $X \mapsto AX$ on *kohtisuora* projektio.)

Ratkaisu: (a) Jos kehitetään ensimmäisen pystysarakken mukaan niin saadaan

$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 0 \cdot \det\left(\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & 0\end{bmatrix}\right) + (-1)^3 \cdot 0 \cdot \det\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$+ (-1)^4 \cdot 4 \cdot \det\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\right) = 0 + 0 + 4(3\cdot 0 - 2\cdot 3) = -24.$$

Jos $B^2 = A$ niin $\det(A) = \det(B^2) = \det(B)\det(B) = \det(B)^2$ josta seuraa, että $\det(B) = \pm i2\sqrt{6}$ mikä on mahdotonta jos B on reaalinen matriisi. Ei ole siis mahdollista löytää tällaista matriisia B.

(b) Nyt $(X - AX)^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}} - X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}} - X^{\mathrm{T}}A$ koska A on symmetrinen. Näin ollen $(X - AX)^{\mathrm{T}}AX = X^{\mathrm{T}}AX - X^{\mathrm{T}}A^2X = X^{\mathrm{T}}AX - X^{\mathrm{T}}AX = 0$ koska $A^2 = A$.

4.

(a) Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -6\end{bmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

(b) Tutki ja piirrä käyrä $7x^2 + 18xy - 17y^2 = 40$. (Pystyt hyödyntämään (a)-kohdan tuloksia jos ensin päättelet miten esimerkiksi matriisien A ja $B = 3A+I$ ominaisarvot ja ominaisvektorit liittyvät toisiinsa.)

Ratkaisu: (a) Lasketaan

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix}(2-\lambda) & 3\\ 3 & (-6-\lambda)\end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0.$$

Tästä saadaan ratkaisuksi,

$$\lambda = -2 \pm \sqrt{4+21} = \begin{cases}3,\\ -7,\end{cases}$$

joten nähdään, että ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = -7$.

Seuraavaksi lasketaan ominaisarvoon $\lambda_1 = 3$ liittyvä ominaisvektori, eli ratkaistaan yhtälö $(A - 3I)X = 0$. Gaussin menetelmällä saadaan,

$$\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -9 & 0\end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 + 3r_1$$
$$\sim \begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Tästä nähdään, että jos valitaan $x_2 = 1$ niin x_1:n ratkaisuksi yhtälöstä $-x_1 + 3 = 0$ saadaan $x_1 = 3$. Ominaisvektoriksi voidaan siis valita $X_1 = [3, 1]^{\mathrm{T}}$.

Koska matriisi on symmetrinen niin ominaisarvoon $\lambda_2 = -7$ liittyvä ominaisvektori on kohtisuorassa X_1 vastaan, eli ominaisvektoriksi voidaan valita $X_2 = [-1, 3]^{\mathrm{T}}$.

Toisella tavalla eli ratkaistaan yhtälö $(A + 7I)X = 0$: Silloin saadaan,

$$\begin{bmatrix}9 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 - \tfrac{1}{3}r_1$$
$$\sim \begin{bmatrix}9 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Jos nyt valitaan $x_2 = 1$ niin x_1:n ratkaisuksi yhtälöstä $9x_1 + 3 = 0$ tulee $x_1 = -\frac{1}{3}$. Ominaisvektoriksi voidaan siis valita $X_2 = [-\frac{1}{3}, 1]^{\mathrm{T}}$.

(b) Muodostetaan ensin neliömuodon matriisi, joka on

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 9 & -17 \end{bmatrix}.$$

Nyt huomataan, että $B = 3A + I$. Jos nyt $AX_j = \lambda_j X_j$ niin $BX_j = 3\lambda_j X_j + X_j = (3\lambda_j + 1)X_j$, eli B:n ominaisarvot ovat $\mu_1 = 10$ ja $\mu_2 = -20$. Ominaisvektorit on on nyt valittava siten, että niiden pituudet ovat 1 joten valitaan ominaisvektoreiksi

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ominaisvektoreista muodostetaan matriisi V:

$$V = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Uudet koordinaatit x' ja y' määritellään kaavalla

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Koska V on valittu ortogonaaliseksi niin $-7x^2 - 18xy + 17y^2 = 10x'^2 - 20y'^2$. Uudessa koordinaattisysteemissä yhtälö on siis

$$10x'^2 - 20y'^2 = 40.$$

Koska uudet x'- ja y'-koordinaattiakselit ovat ominaisvektoreiden suuntaisia, niin käyrä näyttää suunnilleen tällaiselta: