

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktioalaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!*

1.

(a) Osoita induktiolla, että jos $q \neq 1$ niin

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad n \geq 0.$$

(Oletetaan, että $q^0 = 1$ myös jos $q = 0$.)

(b) Olkoon $w = -1 + i2$. Määritä yhtälön $e^z = w$ kaikki ratkaisut, eli määritä kaikki funktion $\ln(w)$ arvot.

2. Millä parametrin a arvoilla on yhtälösystemillä

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & -2x_2 & +(2a - 1)x_3 & = & 1 \\ -5x_1 & +11x_2 & +(4 - 10a + a^2)x_3 & = & -2 \\ -2x_1 & +5x_2 & +(1 - 4a + 2a^2)x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & -6x_2 & +(5a - a^2)x_3 & = & -2 \end{array}$$

on äärettömän monta, täsmälleen yksi, tai ei yhtään ratkaisua? Kun ratkaisuja löytyy, määritä ne Gaussin algoritmin avulla. Voidaanko jo sen perusteella että yhtälösystemissä on 4 yhtälöä ja 3 tuntematonta sanoa mitään ratkaisujen lukumäärästä?

3.

(a) Olkoon $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. Laske A :n determinantti. Löytyykö reaalinen matriisi B siten, että $B^2 = A$? Perustele!

(b) Olkoon A symmetrinen $n \times n$ matriisi siten, että $A^2 = A$. Osoita, että silloin pätee $(X - AX)^T AX = 0$ kaikilla $n \times 1$ pystyvektoreilla X . (Tämä merkitsee sitä, että kuvaus $X \mapsto AX$ on *kohtisuora* projektio.)

4.

(a) Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

(b) Tutki ja piirrä käyrä $7x^2 + 18xy - 17y^2 = 40$. (Pystyt hyödyntämään (a)-kohdan tuloksia jos ensin päättelet miten esimerkiksi matriisien A ja $B = 3A + I$ ominaisarvot ja ominaisvektorit liittyvät toisiinsa.)