TKK, Matematiikan laitos — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti 3.9.2001

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Kirjoita luku $\overline{w}$ muodossa $a + \mathrm{i}b$ kun $w = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$.

(b) Olkoon $w = -2 + \mathrm{i}\,2$. Määritä yhtälön $z^3 = w$ kaikki ratkaisut, eli määritä kaikki arvot $w^{\frac{1}{3}}$.

Ratkaisu: (a) Nyt

$$w = \frac{-1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{(-1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{-2-\mathrm{i}+2\mathrm{i}-1}{4+1} = -\frac{3}{5} + \mathrm{i}\frac{1}{5}.$$

Näin ollen

$$\overline{w} = -\frac{3}{5} - \mathrm{i}\frac{1}{5}.$$

(b) Kompleksiluvun w itseisarvo on $|w| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} = 2.828$, ja w:n argumentti on $\arctan(\frac{2}{-2}) + \pi = \frac{3\pi}{4} = 2.356$ (tässä lisättiin π koska $\mathrm{Re}\,w < 0$). Jos $|z| = r$ ja $\arg(z) = \theta$, niin $|z^3| = r^3$ ja $\arg(z^3) = 3\theta$. Jos nyt $z^3 = w$ niin $r^3 = |w| = 2\sqrt{2} = 2.828$ ja $3\theta = 2.356 + 2\pi n$ missä n on kokonaisluku. Tästä seuraa, että $r = \sqrt{2} = 1.414$ ja $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}n$. Nyt saadaan eri ratkaisuja kun $n = 0, 1, 2$ koska kun esim. $n = 3$ saadaan sama luku kun $n = 0$ jne. Haetut ratkaisut ovat

$$z_0 = \sqrt{2}\Big(\cos(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2\pi}{3}\cdot 0) + \mathrm{i}\,\sin(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2\pi}{3}\cdot 0)\Big) = 1 + \mathrm{i}$$
$$z_1 = \sqrt{2}\Big(\cos(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2\pi}{3}\cdot 1) + \mathrm{i}\,\sin(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2\pi}{3}\cdot 1)\Big) = -1.366 + \mathrm{i}\,0.366$$
$$z_2 = \sqrt{2}\Big(\cos(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2\pi}{3}\cdot 2) + \mathrm{i}\,\sin(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2\pi}{3}\cdot 2)\Big) = 0.366 - \mathrm{i}\,1.366$$

---

2. Ratkaise Gaussin algoritmilla yhtälösysteemi

$$\begin{array}{rrrrcl}
2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 9 \\
-x_1 & +2x_2 & -6x_3 & +x_4 & = & 8 \\
x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 9 \\
3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 4
\end{array}$$

Ratkaisu: Gaussin algorimtmilla saadaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & -6 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 + \frac{1}{2} r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - \frac{1}{2} r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - \frac{3}{2} r_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{5}{2} & -5 & \frac{5}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} & -\frac{19}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 - \frac{3}{5} r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - \frac{1}{5} r_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{5}{2} & -5 & \frac{5}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - 4r_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{5}{2} & -5 & \frac{5}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Koska kolmannella pystysarakkeella ei ole tukialkiota, niin x_3 voidaan valita vapaasti ja merkitään $x_3 = t$. Kolmannen vaakarivin mukaan $-x_4 = -3$, joten $x_4 = 3$. Toisen vaakarivin mukaan $\frac{5}{2}x_2 - 5x_3 + \frac{5}{2}x_4 = \frac{25}{2}$, eli $x_2 = 5 + 2x_3 - x_4 = 5 - 2t - 3 = 2 + 2t$. Ensimmäisen rivin mukaan $2x_1+x_2+2x_3+3x_4 = 9$ josta seuraa, että $2x_1 = 9-2-2t-2t-9$, eli $x_1 = -1 - 2t$. Ratkaisut ovat siis

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

missä t on jokin reaaliluku.

3.

(a) Laske raja-arvo $\lim_{x\to 0+} \frac{f(\sqrt{x})}{g(x^2)}$ kun tiedetään, että $f(t) = t^2+O(t^3)$ ja $g(t) = 2t+O(t^2)$ (kun $t \to 0$).

(b) Määritä pienin a ja suurin b siten, että funktio $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}$ on konveksi välillä (a, b).

Ratkaisu: (a) Koska $f(t) = t^2 + O(t^3)$ niin $f(\sqrt{x}) = x + O(x^{\frac{3}{2}})$ ja koska $g(t) = 2t + O(t^2)$ niin $g(x^2) = 2x^2 + O(x^4)$. Näin ollen

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(\sqrt{x})}{g(x^2)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x + O(x^{\frac{3}{2}})}{2x^2 + O(x^4)} = \lim_{x\to 0+} \frac{1 + O(x^{\frac{1}{2}})}{2x + O(x^2)} = \infty.$$

(b) Koska $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$ ja $f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} = (x-3)\mathrm{e}^{-x}$ niin nähdään, että $f''(x) \geq 0$ täsmälleen silloin kun $x \geq 3$. Tästä voidaan päätellä, että $a = 3$ ja $b = \infty$ koska jos otetaan suurempi väli niin f'' on negatiivinen tämän välin osalla, eikä siis f ole siellä konveksi.

4.

(a) Laske integraali $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{9-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(b) Määritä integraalin $\int_0^2 \sqrt{x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ likiarvo käyttäen Simpsonin menetelmää ja 4 yhtä pitkää osaväliä.

Ratkaisu: (a) Lasketaan ensin osamurtokehitelmä ja todetaan ensin, että $9-t^2 = (3+t)(3-t)$. Nyt

$$\frac{1}{9-t^2} = \frac{A}{3+t} + \frac{B}{3-t}.$$

Jos ensin kerrotaan $3+t$:lla ja annetaan $t \to -3$ niin saadaan

$$A = \lim_{t\to-3} \frac{3+t}{(3+t)(3-t)} = \frac{1}{6},$$

ja samalla tavalla saadaan

$$B = \lim_{t\to 3} \frac{3-t}{(3+t)(3-t)} = \frac{1}{6}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{9-t^2} &= \frac{1}{6}\int_0^2 \left(\frac{1}{3+t} + \frac{1}{3-t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\Big/_0^2 (\ln(3+t) - \ln(3-t)) \\ &= \frac{1}{6}(\ln(5) - \ln(1) - \ln(3) + \ln(3)) = \frac{1}{6}\ln(5) \approx 0.2682.\end{aligned}$$

(b) Nyt $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = 0.5$ joten Simpsonin menetelmän mukaisesti lasketaan

$$S_4 = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\Big),$$

missä $f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^x$ ja $x_j = 0 + j\cdot 0.5$, $j = 0, 1, \ldots, 4$. Silloin saadaan

$$S_4 = \frac{0.5}{3}\Big(0 + 4\cdot 1.1658 + 2\cdot 2.7183 + 4\cdot 5.4889 + 2\cdot 10.45\Big) = 7.0842.$$

5.

(a) Suora kulkee pisteen $(2,3,1)$ kautta ja on tasojen $x-y+2z=3$ ja $-2x+y-z=4$ suuntainen. Määritä suoran yhtälö normaalimuodossa.

(b) Määritä ne pisteet, missä käyrän $y = 2x^2$ kaarevuus on $\frac{1}{2}$. Mikä kaavoista $\frac{(\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t))\cdot\mathbf{r}'''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|^2}$ ja $\frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$ antaa parametrimuodossa $\mathbf{r}(t)$ annetun käyrän kaarevuuden?

Ratkaisu: (a) Annettujen tasojen normaalit ovat $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ sekä $\mathbf{n}_2 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja jos suora on molempien tasojen suuntainen niin se on kohtisuorassa molempien tasojen normaaleja vastaan, eli suuntavektoriksi voidaan valita

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1-2) - \mathbf{j}(-1+4) + \mathbf{k}(1-2) = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Suuntavektoriksi voidaan myös valita $\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ja suoran normaalimuotoiseksi yhtälöksi saadaan

$$x-2=\frac{y-3}{3}=z-1.$$

(b) Käyrän $y=2x^2$ parametriesitys on esimerkiksi $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+2t^2\mathbf{j}$ jolloin $\mathbf{r}'(t)=\mathbf{i}+4t\mathbf{j}$ ja $\mathbf{r}''(t)=4\mathbf{j}$. Kaarevuus lasketaan kaavalla $\kappa(t)=\frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$. (Kaarevuus on aina ≥ 0.) Tässä tapauksessa

$$\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 4t & 0\\ 0 & 4 & 0\end{vmatrix}=4\mathbf{k},$$

joten

$$\kappa(t)=\frac{4}{\sqrt{1+16t^2}^3}.$$

Jos $\kappa(t)=\frac{1}{2}$ niin

$$8=\sqrt{1+16t^2}^3 \Leftrightarrow 1+16t^2=2 \Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{4}$$

Kaarevuus on siis $\frac{1}{2}$ pisteissä $(\frac{1}{4},\frac{1}{8})$ ja $(-\frac{1}{4},\frac{1}{8})$.