TKK, Matematiikan laitos — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti 3.9.2001

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Kirjoita luku $\overline{w}$ muodossa $a + \mathrm{i}b$ kun $w = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$.

(b) Olkoon $w = -2 + \mathrm{i}\,2$. Määritä yhtälön $z^3 = w$ kaikki ratkaisut, eli määritä kaikki arvot $w^{\frac{1}{3}}$.

2. Ratkaise Gaussin algoritmilla yhtälösysteemi

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 9 \\ -x_1 & +2x_2 & -6x_3 & +x_4 & = & 8 \\ x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 9 \\ 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 4 \end{array}$$

3.

(a) Laske raja-arvo $\lim_{x\to 0+} \frac{f(\sqrt{x})}{g(x^2)}$ kun tiedetään, että $f(t) = t^2 + O(t^3)$ ja $g(t) = 2t + O(t^2)$ (kun $t \to 0$).

(b) Määritä pienin a ja suurin b siten, että funktio $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}$ on konveksi välillä (a, b).

4.

(a) Laske integraali $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{9-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(b) Määritä integraalin $\int_0^2 \sqrt{x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ likiarvo käyttäen Simpsonin menetelmää ja 4 yhtä pitkää osaväliä.

5.

(a) Suora kulkee pisteen $(2, 3, 1)$ kautta ja on tasojen $x - y + 2z = 3$ ja $-2x + y - z = 4$ suuntainen. Määritä suoran yhtälö normaalimuodossa.

(b) Määritä ne pisteet, missä käyrän $y = 2x^2$ kaarevuus on $\frac{1}{2}$. Mikä kaavoista $\frac{(\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t))\cdot\mathbf{r}'''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|^2}$ ja $\frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$ antaa parametrimuodossa $\mathbf{r}(t)$ annetun käyrän kaarevuuden?