TKK, Matematiikan laitos — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti 7.4.2001

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Kirjoita kompleksiluku $\dfrac{z-\mathrm{i}}{2-\overline{z}}$ muodossa $a+\mathrm{i}b$ kun $z=1+\mathrm{i}$.

(b) Olkoon $w=-1-\mathrm{i}$. Määritä yhtälön $\mathrm{e}^z=w$ kaikki ratkaisut, eli määritä kaikki funktion $\ln(w)$ arvot.

Ratkaisu: (a) Kun $z=1+\mathrm{i}$ niin $\overline{z}=1-\mathrm{i}$ ja

$$\frac{z-\mathrm{i}}{2-\overline{z}}=\frac{1+\mathrm{i}-\mathrm{i}}{2-1+\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1-\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}.$$

(b) Kompleksiluvun w itseisarvo on $|w|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, ja w:n argumentti on $\arctan(\frac{-1}{-1})+\pi=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$ (tässä lisättiin π koska $\mathrm{Re}\, w<0$). Jos $z=a+\mathrm{i}b$ niin $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^a$ ja $\arg(\mathrm{e}^z)=b$, joten jos nyt $\mathrm{e}^z=w$ niin $\mathrm{e}^a=\sqrt{2}$ ja $b=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$ missä n on kokonaisluku. Tästä seuraa, että $a=\ln(\sqrt{2})$ jolloin haetut ratkaisut ovat

$$z=\ln(\sqrt{2})+\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

---

2. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\-2&1&1\\1&0&2\end{bmatrix}$$

käänteismatriisi Gaussin algoritmin avulla.

Ratkaisu: Gaussin algoritmin avulla saadaan

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}1&0&3&1&0&0\\-2&1&1&0&1&0\\1&0&2&0&0&1\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}\\ r_2\leftarrow r_2+2r_1\\ r_3\leftarrow r_3-r_1\end{matrix}\\
\sim&\begin{bmatrix}1&0&3&1&0&0\\0&1&7&2&1&0\\0&0&-1&-1&0&1\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}r_1\leftarrow r_1+3r_3\\ r_2\leftarrow r_2+7r_3\\ \\ \end{matrix}\\
\sim&\begin{bmatrix}1&0&0&-2&0&3\\0&1&0&-5&1&7\\0&0&-1&-1&0&1\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}\\ \\ r_3\leftarrow -r_1\end{matrix}\\
\sim&\begin{bmatrix}1&0&0&-2&0&3\\0&1&0&-5&1&7\\0&0&1&1&0&-1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tästä päätellään, että käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

---

3. Määritä jokin polynomi p (esimerkiksi Taylorin polynomi) siten, että

$$\left| p(x) - \mathrm{e}^{-x^2} \right| < 0.01 \text{ kun } |x| \leq 1.$$

Ratkaisu: koska $0 \leq x^2 \leq 1$ kun $|x| \leq 1$ niin nähdään, että jos löydetään polynomi q siten, että $|q(t) - \mathrm{e}^{-t}| \leq 0.01$ kun $t \in [0,1]$, niin silloin polynomille $p(x) = q(x^2)$ pätee $\left| p(x) - \mathrm{e}^{-x^2} \right| < 0.01$ kun $|x| \leq 1$. Taylorin kaavan mukaan

$$f(t) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} t^j = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} t^{n+1},$$

missä s on 0:n ja t:n välillä, eli $s \in (0,t)$ jos $t > 0$. Jos $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$ niin $f^{(j)}(t) = (-1)^j \mathrm{e}^{-t}$ joten jos $t \in [0,1]$ niin että $s \geq 0$ niin

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} t^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} |t|^{n+1} \overset{0 \leq t \leq 1}{\leq} \frac{1}{(n+1)!}.$$

Nyt valitaan siis

$$q(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} t^j = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^n}{n!},$$

missä n siis on valittava niin, että $\frac{1}{(n+1)!} < 0.01$ ja tähän riittää valita $n = 4$ koska $(4+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 > 100$. Valitaan siis $q(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}$, ja silloin

$$p(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}.$$

---

4. Ratkaise likimääräisesti yhtälö $x^3 + \ln(1+x^2) - 2 = 0$ Newtonin menetelmällä, siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-4}. Alkuarvona voit käyttää $x_0 = 1$.

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x^3 + \ln(1+x^2) - 2$, jolloin $f'(x) = 3x^2 + \frac{2x}{1+x^2}$. Newtonin menetelmän mukaan on silloin laskettava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^3 + \ln(1+{x_n}^2) - 2}{3{x_n}^2 + \frac{2x_n}{1+{x_n}^2}}.$$

Jos valitaan $x_0 = 1$, niin saadaan:

$$x_0 = 1.000000$$
$$x_1 = 1.076713$$
$$x_2 = 1.072683$$

Koska $f(x_2) = 0.000051 > 0$ ja $f(x_2 - 10^{-4}) = -0.00039 < 0$ niin nähdään merkinvaihtolauseen nojalla, että $x_2 = 1.072683$ kelpaa haetuksi likiarvoksi.

5.

(a) Suorita sijoitus $x = \tan(t)$ integraalissa

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Näin saatua uutta integraalia ei tarvitse laskea.

(b) Määritä integraalin $\int_0^3 \sin(x+x^2)\,\mathrm{d}x$ likiarvo käyttäen Simpsonin menetelmää ja 4 yhtä pitkää osaväliä. Muista käyttää radiaaneja laskimessasi!

Ratkaisu: (a) Jos $x = \tan(t)$ niin $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t$ ja ja kun $x = 0$ niin $t = 0$ ja kun $x = 1$ niin $t = \frac{\pi}{/}4$. Näin ollen uudeksi integraaliksi tulee

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2}}}\frac{1}{\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)^2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t,$$

koska $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ ja $\sqrt{\cos(t)^2} = \cos(t)$ koska $\cos(t) > 0$ kun $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

(b) Nyt $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{4} = 0.75$ joten Simpsonin menetelmän mukaisesti lasketaan

$$S_4 = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_{4)}\Big),$$

missä $f(x) = \sin(x+x^2)$ ja $x_j = 0 + j \cdot 0.75$, $j = 0, 1, \ldots, 4$. Silloin saadaan

$$S_4 = \frac{0.75}{3}\Big(0 + 4\cdot 0.96683 + 2\cdot(-0.57156) + 4\cdot 0.85695 + 2\cdot(-0.53657)\Big) = 1.4038.$$
