Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 10.1.2001

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Olkoon $w = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

(a) Määritä w:n kuva kuvauksessa $z \mapsto \frac{1}{z+2}$ muodossa $a + \mathrm{i}b$.

(b) Määritä (muodossa $a + \mathrm{i}b$) kaikki kompleksiluvut z, jotka toteuttavat yhtälön $\mathrm{e}^z = \overline{w}$, eli määritä funktion $\ln(\overline{w})$ kaikki arvot. (Huom! $\overline{w}$ eikä w.)

Ratkaisu: (a) Koska $w = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ niin

$$\frac{1}{w+2} = \frac{1}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i}\sqrt{3})} = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+3} = \tfrac{1}{4} - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{4}.$$

(b) Nyt $|\overline{w}| = \sqrt{1+3} = 2$ ja $\arg(\overline{w}) = \arctan(\frac{-\sqrt{3}}{-1}) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$. Jos $z = a + \mathrm{i}b$ ja $\mathrm{e}^z = \overline{w}$ niin $\mathrm{e}^a = |\overline{w}|$ ja $b = \arg(\overline{w}) + 2n\pi$, eli $a = \ln(2)$ ja $b = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi$, eli

$$z = \ln(2) + \mathrm{i}(\tfrac{4}{3}\pi + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

---

2. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi Gaussin algoritmin avulla.

Ratkaisu: Gaussin algoritmin avulla saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r_2 \leftarrow r_2 + r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r_3 \leftarrow r_3 - 3r_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 \leftarrow r_1 + 2r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 - 3r_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -9 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad r_1 \leftarrow r_1 - 2r_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -41 & -26 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tästä päätellään, että käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} -41 & -26 & 8 \\ 16 & 10 & -3 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

---

3. Yritetään osoittaa, että $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{f(x)} = 0$. Riitttääkö, että osoitetaan, että kun $0 < |x| < 1$ niin

(a) $f(x) \geq x$?

(b) $|f(x)| \geq \mathrm{e}^{|x|} - 1$?

(c) $0 < |f(x)| \leq \sin(|x|)$?

Perustele!

Ratkaisu: Koska $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ niin $1 - \cos(x) = \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$.

(a) Ei riitä, koska jos esimerkiksi $f(x) = x$ kun $x > 0$ ja $f(x) = x^2$ kun $x < 0$ niin $f(x) \geq x$ kaikilla x mutta

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1-\cos(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)}{x^2} = \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1}{2} + O(x^2)}{1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

(b) Funktio $g(x) = \mathrm{e}^x$ on konveksi ($g''(x) = \mathrm{e}^x > 0$) joten $g(x) \geq g(0) + g'(0)x = 1 + x$, eli $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$. Näin ollen $|f(x)| \geq |x|$ kun $0 < |x| < 1$. Koska nyt

$$\left|\frac{1-\cos(x)}{f(x)}\right| \leq \frac{|\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)|}{|x|} = |\tfrac{1}{2}x + O(x^3)|,$$

ja $\lim_{x\to 0}|x + O(x^3)| = 0$, niin nähdään kuristusperiaatteen nojalla, että riittää olettaa, että $|f(x)| \geq \mathrm{e}^{|x|} - 1$.

(c) Ei riitä, koska jos $f(x) = \sin(x^2)$ niin $0 < |f(x)| = \sin(x^2) \leq \sin(|x|)$ kun $0 < |x| < 1$ (jolloin $x^2 < |x|$) ja

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} (\tfrac{1}{2} + O(x^2)) \frac{1}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

4.

(a) Laske integraali $\int x \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ käyttäen osittaisintegrointia.

(b) Määritä integraalin $\int_0^2 \sqrt{x}\ln(x+2)\,\mathrm{d}x$ likiarvo käyttäen Simpsonin menetelmää ja 4 yhtä pitkää osaväliä.

Ratkaisu: (a) Osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \int \tfrac{1}{2}x^2\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right) + C \\ &= \tfrac{1}{2}\Big((x^2-1)\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}x^2 + x\Big) + C.\end{aligned}$$

(b) Nyt $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = 0.5$ joten Simpsonin menetelmän mukaisesti lasketaan

$$S_4 = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\Big),$$

missä $f(x) = \sqrt{x}\ln(x+2)$ ja $x_j = 0 + j\cdot 0.5$, $j = 0, 1, \ldots, 4$. Silloin saadaan

$$S_4 \;=\; \frac{0.5}{3}\Big(0 + 4\cdot 0.64792 + 2\cdot 1.0986 + 4\cdot 1.5343 + 2\cdot 1.9605\Big) \;=\; 2.1478.$$

5.

(a) Määritä käyrän $\mathbf{r}(t) = (2+\sqrt{2}\cos(t))\mathbf{i} + (1-\sin(t))\mathbf{j} + (3+\sin(t))\mathbf{k}$ kaarevuus muuttujan t funktiona. Mikä kaavoista $\frac{(\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t))\cdot\mathbf{r}'''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|^2}$ ja $\frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$ antaa kaarevuuden?

(b) Määritä (korkeintaan) 3-asteinen polynomi p, joka toteuttaa ehdot $p(-1) = 3$, $p(0) = -1$, $p(3) = -25$ ja $p(-2) = 25$, käyttäen Newtonin interpolointikaavaa. Laske tämän polynomin arvo pisteessä 2.

Ratkaisu: (a) Kaarevuus lasketaan kaavalla $\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$. (Muista, että kaarevuus on aina ≥ 0.) Tässä tapauksessa

$$\mathbf{r}'(t) = -\sqrt{2}\sin(t)\mathbf{i} - \cos(t)\mathbf{j} + \cos(t)\mathbf{k},$$

ja

$$\mathbf{r}''(t) = -\sqrt{2}\cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} - \sin(t)\mathbf{k}.$$

Näin ollen

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2\sin(t)^2 + \cos(t)^2 + \cos(t)^2} = \sqrt{2},$$

ja

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t) &= \det\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\sqrt{2}\sin(t) & -\cos(t) & \cos(t)\\ -\sqrt{2}\cos(t) & \sin(t) & -\sin(t)\end{bmatrix} \\ &= \big(\cos(t)\sin(t) - \cos(t)\sin(t)\big)\mathbf{i} + \big(-\sqrt{2}\cos(t)^2 - \sqrt{2}\sin(t)^2\big)\mathbf{j} \\ &\qquad + \big(-\sqrt{2}\sin(t)^2 - \sqrt{2}\cos(t)^2\big) = -\sqrt{2}(\mathbf{j}+\mathbf{k}),\end{aligned}$$

joten

$$\kappa = \frac{|-\sqrt{2}(\mathbf{j}+\mathbf{k})|}{\sqrt{2}^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(b) Jaetut erotukset lasketaan seuraavan kaavion avulla:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$	$\ldots$
-1	3			
		-4		
0	-1		-1	
		-8		-2
3	-25		1	
		-10		
-2	25			

Haettu polynomi on siis

$$p(x) = 3 - 4(x+1) - (x+1)(x+0) - 2(x+1)(x+0)(x-3),$$

eli

$$p(x) = -2x^3 + 3x^2 + x - 1.$$

Tämän polynomin arvo annetussa pisteessä on $p(2) = -3$.