Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 10.1.2001

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Olkoon $w = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

(a) Määritä w:n kuva kuvauksessa $z \mapsto \frac{1}{z+2}$ muodossa $a + \mathrm{i}b$.

(b) Määritä (muodossa $a + \mathrm{i}b$) kaikki kompleksiluvut z, jotka toteuttavat yhtälön $\mathrm{e}^z = \overline{w}$, eli määritä funktion $\ln(\overline{w})$ kaikki arvot. (Huom! $\overline{w}$ eikä w.)

2. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi Gaussin algoritmin avulla.

3. Yritetään osoittaa, että $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{f(x)} = 0$. Riitttääkö, että osoitetaan, että kun $0 < |x| < 1$ niin

(a) $f(x) \geq x$?

(b) $|f(x)| \geq \mathrm{e}^{|x|} - 1$?

(c) $0 < |f(x)| \leq \sin(|x|)$?

Perustele!

4.

(a) Laske integraali $\int x \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ käyttäen osittaisintegrointia.

(b) Määritä integraalin $\int_0^2 \sqrt{x}\ln(x+2)\,\mathrm{d}x$ likiarvo käyttäen Simpsonin menetelmää ja 4 yhtä pitkää osaväliä.

5.

(a) Määritä käyrän $\mathbf{r}(t) = (2+\sqrt{2}\cos(t))\mathbf{i} + (1-\sin(t))\mathbf{j} + (3+\sin(t))\mathbf{k}$ kaarevuus muuttujan t funktiona. Mikä kaavoista $\frac{(\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t))\cdot\mathbf{r}'''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|^2}$ ja $\frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$ antaa kaarevuuden?

(b) Määritä (korkeintaan) 3-asteinen polynomi p, joka toteuttaa ehdot $p(-1) = 3$, $p(0) = -1$, $p(3) = -25$ ja $p(-2) = 25$, käyttäen Newtonin interpolointikaavaa. Laske tämän polynomin arvo pisteessä 2.