Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
3. välikoe 19.12.2000

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Olkoon $f(t) = 1$ kun $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $f(t) = 0$ kun $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ ja $f(t+1) = f(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Määritä funktion f Fourier-kertoimet, eli laske integraalit $\hat{f}(n) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} f(t)\,\mathrm{d}t$ kun n on kokonaisluku. (Käsittele erikseen tapaukset $n = 0$ ja $n \neq 0$.)

(b) Onko integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{x^3 + (x^2 \sin(\frac{1}{x}))^2}\,\mathrm{d}x$ äärellinen, eli suppeneeko integraali? Perustele!

Ratkaisu: (a) Kun $n = 0$ niin $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} = \mathrm{e}^{-0\cdot \mathrm{i}2\pi t} = \mathrm{e}^0 = 1$ joten

$$\hat{f}(0) = \int_0^1 \mathrm{e}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Kun $n \neq 0$ niin

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} = \frac{1}{-\mathrm{i}2\pi n}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi n} - \mathrm{e}^0\right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi n}\left(\cos(\pi n) + \mathrm{i}\sin(\pi n) - 1\right) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi n}\left((-1)^n - 1\right) \\ &= \begin{cases} -\frac{\mathrm{i}}{\pi n}, & \text{jos } n \text{ on pariton,} \\ 0, & \text{jos } n \text{ on parillinen (ja } \neq 0). \end{cases}\end{aligned}$$

(b) Koska x, x^3 ja $(x^2 \sin(\frac{1}{x}))^2 \geq 0$ kun $x \in (1, \infty)$ niin

$$0 \leq \frac{x}{x^3 + (x^2 \sin(\frac{1}{x}))^2} \leq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2},$$

ja koska $(2 > 1)$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 < \infty,$$

niin voidaan ns. majoranttiperiaatteen nojalla päätellä, että tarkasteltavana oleva integraali suppenee.

2.

(a) Määritä integraalin $\int_3^5 \frac{\ln(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x$ likiarvo Simpsonin menetelmällä käyttäen 8 yhtä pitkää osaväliä.

(b) Leena sai virhearvioksi (standardikaavoja käyttäen) $0{,}869 \cdot 10^{-5}$ kun hän käytti 6 yhtä pitkää osaväliä (ja Simpsonin menetelmää). Määritä tämän perusteella virhearvio kun käytetään 8 osaväliä.

Ratkaisu: (a) Nyt $h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-3}{8} = 0.25$ joten Simpsonin menetelmän mukaisesti lasketaan

$$S_8 = \frac{h}{3}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+2f(x_6)+4f(x_7)+f(x_8)\Big),$$

missä $f(x) = \frac{\ln(x)}{x+1}$ ja $x_j = 3 + j \cdot 0.25$, $j = 0, 1, \ldots 8$. Silloin saadaan

$$S_8 = \frac{0.25}{3}\Big(0.27465 + 4 \cdot 0.27733 + 2 \cdot 0.27839 + 4 \cdot 0.27826 + 2 \cdot 0.27726 + 4 \cdot 0.2756 + 2 \cdot 0.27347 + 4 \cdot 0.27098 + 2 \cdot 0.26824\Big) = 0.55082.$$

(b) Simpsonin menetelmän virhearvio on muotoa $\frac{C}{n^4}$ missä C on tietty vakio (täsmällisemmin $C = \sup_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|(b-a)^5/180$), ja n on osavälien lukumäärä. Jos

$$\frac{C}{6^4} = 0{,}869 \cdot 10^{-5} \text{ niin } \frac{C}{8^4} = \frac{6^4}{8^4} 0{,}869 \cdot 10^{-5} = 0{,}275 \cdot 10^{-5}.$$

Virhearvioksi saadaan siis $0{,}275 \cdot 10^{-5}$.

3.

(a) Laske vektoreiden $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ristitulo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Määritä vektorin $\mathbf{a}$ (vektori)projektio vektorille $\mathbf{b}$.

(b) Napakoordinaatistossa käyrän yhtälö on $r = \dfrac{2}{2 - \cos(\theta)}$. Mikä on tämän käyrän yhtälö xy-koordinaatistossa?

Ratkaisu:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= ((-1)\cdot(-1) - 2 \cdot 1)\mathbf{i} + (2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1))\mathbf{j} + (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Vektorin $\mathbf{a}$ projekio vektorille $\mathbf{b}$ on

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} = \frac{1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1)}{2^2 + 1^2 + 1^2}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = -\frac{1}{6}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

(b) Jos

$$r = \frac{2}{2 - \cos(\theta)} \text{ niin } 2r = 2 + r\cos(\theta) \text{ eli } 4r^2 = (2 + r\cos(\theta))^2.$$

Koska $x = r\cos(\theta)$ ja $r^2 = x^2 + y^2$, niin yhtälöksi tulee

$$4x^2 + 4y^2 = (2 + x)^2,$$

eli

$$3x^2 - 4x + 4y^2 = 4.$$

4.

(a) Määritä (korkeintaan) 3-asteinen polynomi p, joka toteuttaa ehdot $p(0) = 3$, $p(-1) = 6$, $p(2) = 3$ ja $p(3) = -6$, käyttäen Newtonin interpolointikaavaa. (Ellet osaa käyttää Newtonin interpolointikaavaa, määritä tämä polynomi jollain toisella tavalla.)

(b) Funktiosta f tiedetään, että $|f(x)| \leq 4$, $|f'(x)| \leq 2 + |x|$, $|f''(x)| \leq 4 + 2|x|$ ja $|f'''(x)| \leq 20 + x^2$ kun $x \in \mathbb{R}$. Jos $x_j = 2 + \frac{2j}{n}$, $j = 0, 1, \ldots, n$ ja funktio g on jatkuva ja valittu siten, että $g(x_j) = f(x_j)$, kaikilla $j = 0, 1, \ldots, n$ ja $g''(x) = 0$ kun $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, niin miten n olisi valittava jotta varmuudella tiedettäisiin, että $|f(x) - g(x)| \leq 10^{-3}$ kun $x \in [2, 4]$.

Ratkaisu: (a) Jaetut erotukset lasketaan seuraavan kaavion avulla:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	...
0	3			
		-3		
-1	6		1	
		-1		-1
2	3		-2	
		-9		
3	-6			

Haettu polynomi on siis

$$p(x) = 3 - 3(x + 0) + (x + 0)(x + 1) - (x + 0)(x + 1)(x - 2),$$

eli

$$p(x) = -x^3 + 2x^2 + 3.$$

(b) Koska $g''(x) = 0$ väleillä (x_{j-1}, x_j) niin kyseessä on lineaarinen splinifunktio, eli jokaisella välillä $[x_{j-1}, x_j]$ interpoloidaan funktiota f polyno milla jonka aste on korkeintaan 1. Polynomi-interpoloinnin virhekaavan nojalla pätee

$$f(x) - g(x) = \frac{f''(t)}{2}(x - x_{j-1})(x - x_j), \quad x \in [x_{j-1}, x_j],$$

missä t on jokin välin $[x_{j-1}, x_j]$ piste. Oletuksen mukaan $|f''(t)| \leq 4 + 2 \cdot 4$ kun $t \in [2, 4]$. Lisäksi $|(x - x_{j-1})(x - x_j)|$ on suurimmillaan kun $x = (x_{j-1} + x_j)/2$ (ja $x \in [x_{j-1}, x_j]$), jolloin tämä lauseke on $\frac{1}{4}(x_j - x_{j-1})^2$. Näin ollen

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{12}{2}\frac{1}{4}\left(\frac{4-2}{n}\right)^2 = \frac{6}{n^2},$$

ja on siis valittava $\frac{6}{n^2} \leq 10^{-3}$, eli $n \geq \sqrt{6000} \approx 77{,}46$ eli on valittava $n \geq 78$ koska n on kokonaisluku.