Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
3. välikoe 19.12.2000

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Olkoon $f(t) = 1$ kun $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $f(t) = 0$ kun $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ ja $f(t+1) = f(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Määritä funktion f Fourier-kertoimet, eli laske integraalit $\hat{f}(n) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} f(t)\,\mathrm{d}t$ kun n on kokonaisluku. (Käsittele erikseen tapaukset $n = 0$ ja $n \neq 0$.)

(b) Onko integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{x^3 + (x^2 \sin(\frac{1}{x}))^2}\,\mathrm{d}x$ äärellinen, eli suppeneeko integraali? Perustele!

2.

(a) Määritä integraalin $\int_3^5 \frac{\ln(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x$ likiarvo Simpsonin menetelmällä käyttäen 8 yhtä pitkää osaväliä.

(b) Leena sai virhearvioksi (standardikaavoja käyttäen) $0{,}869 \cdot 10^{-5}$ kun hän käytti 6 yhtä pitkää osaväliä (ja Simpsonin menetelmää). Määritä tämän perusteella virhearvio kun käytetään 8 osaväliä.

3.

(a) Laske vektoreiden $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ristitulo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Määritä vektorin $\mathbf{a}$ (vektori)projektio vektorille $\mathbf{b}$.

(b) Napakoordinaatistossa käyrän yhtälö on $r = \dfrac{2}{2 - \cos(\theta)}$. Mikä on tämän käyrän yhtälö xy-koordinaatistossa?

4.

(a) Määritä (korkeintaan) 3-asteinen polynomi p, joka toteuttaa ehdot $p(0) = 3$, $p(-1) = 6$, $p(2) = 3$ ja $p(3) = -6$, käyttäen Newtonin interpolointikaavaa. (Ellet osaa käyttää Newtonin interpolointikaavaa, määritä tämä polynomi jollain toisella tavalla.)

(b) Funktiosta f tiedetään, että $|f(x)| \leq 4$, $|f'(x)| \leq 2 + |x|$, $|f''(x)| \leq 4 + 2|x|$ ja $|f'''(x)| \leq 20 + x^2$ kun $x \in \mathbb{R}$. Jos $x_j = 2 + \frac{2j}{n}$, $j = 0, 1, \ldots, n$ ja funktio g on jatkuva ja valittu siten, että $g(x_j) = f(x_j)$, kaikilla $j = 0, 1, \ldots, n$ ja $g''(x) = 0$ kun $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, niin miten n olisi valittava jotta varmuudella tiedettäisiin, että $|f(x) - g(x)| \leq 10^{-3}$ kun $x \in [2, 4]$.