Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
2. välikoe 14.11.2000

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Määritä raja-arvo $\lim_{x\to 0+}\big(\sin(x)\big)^x$ mikäli se on olemassa.

(b) Määritä luvun $\cos(1{,}5)$ likiarvo käyttäen lineaarista approksimaatiota (eli astetta 1 olevaa Taylorin polynomia) ja käyttäen hyväksi tietoa, että $\cos(\frac{\pi}{2})=0$ ja $\pi\approx 3{,}1416$.

Ratkaisu: (a) Kirjoitetaan

$$\sin(x)^x = \mathrm{e}^{x\ln(\sin(x))},$$

josta nähdään, että on laskettava $\lim_{x\to 0+} x\ln(\sin(x))$ ja kirjoitetaan $x\ln(sin(x)) = \frac{\ln(\sin(x))}{\frac{1}{x}}$. Koska $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$ voidaan käyttää l'Hopitalin sääntöä ja on laskettava

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(\sin(x))}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x\cos(x))\frac{x}{\sin(x)} = 0\cdot 1 = 0.$$

Koska eksponenttifunktio on jatkuva todetaan, että

$$\lim_{x\to 0+}\sin(x)^x = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0+} x\ln(\sin(x))} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

On myös mahdollista tulosten $\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+}\ln(1+O(x^2)) = \ln(1) = 0$, ja $\sin(x) = x + O(x^3) = x(1+O(x^2))$ avulla päätellä, että koska

$$x\ln(\sin(x)) = x\ln(x(1+O(x^2))) = x\ln(x) + x\ln(1+O(x^2)),$$

niin saadaan $\lim_{x\to 0+} x\ln(\sin(x)) = 0$.

(b) Lineaarinen approksimaatio on $f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h$. Tässä tapauksessa $f(t)=\cos(t)$, $x=\frac{\pi}{2}$ ja $h = 1{,}5-\frac{\pi}{2}$ joten $f'(x) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$. Koska $h = 1,5-\frac{\pi}{2}\approx -0{,}0708$ niin saadaan

$$\cos(1{,}5)\approx 0-(-0{,}0708) = 0{,}0708.$$

2.

(a) Funktiosta $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiedetään, että se on derivoituva, $|f'(x)|\le \mathrm{e}^{-x}$ kun $x\in\mathbb{R}$ ja $|f(\pi n)|\le \ln(\frac{n+1}{n})$ kun $n\ge 10$ on kokonaisluku. Seuraako tästä, että $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$? Perustele! (Väliarvolause saattaa olla hyödyllinen.)

(b) Laske funktion $f(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$ derivaatta. Onko funktiolla f käänteisfunktio, kun f:n määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$? Perustele! Jos on, määritä käänteisfunktion määrittelyjoukko.

Ratkaisu: (a) Jos $x \geq 10\pi$ niin voidaan valita kokonaisluku $n \geq 10$ siten, että $(n-1)\pi \leq x < n\pi$. Väliarvolauseen nojalla $f(x) = f(n\pi) + f'(c)(x - n\pi)$ missä $c \in [x, n\pi]$ (eli $c \geq x$). Tästä seuraa, annettujen tietojen nojalla, että

$$|f(x)| \leq |f(n\pi)| + |f'(c)||x - n\pi| \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \mathrm{e}^{-c}(n\pi - x)$$
$$\leq \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) + \mathrm{e}^{-x}\pi \leq \ln\left(1 + \frac{\pi}{x}\right) + \pi\mathrm{e}^{-x}.$$

Koska $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\pi}{x}\right) = 1$ ja $\ln(1) = 0$ niin nähdään, että

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + \frac{\pi}{x}\right) + \pi\mathrm{e}^{-x} = 0,$$

ja kuristusperitaatteen nojalla saadaan silloin, että $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
(b) $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (2+x)\mathrm{e}^x$. Tästä nähdään, että f on aidosti kasvava kun $2 + x \geq 0$ eli $x \geq -2$ ja että f on aidosti vähenevä kun $2 + x \leq 0$ eli $x \leq 2$. Koska f on jatkuva niin tästä seuraa, ettei funktiolla f voi olla käänteisfunktiota. Tarkemmin sanottuna, löytyy kaksi pistettä $x_1 \neq x_2$ siten, että $f(x_1) = f(x_2)$ ja silloin käänteisfunktiota ei löydy. Voidaan esimerkiksi valita $x_1 = -3$ jolloin $f(x_1) > f(-2)$ ja koska $f(0) = 1 > f(x_1) > f(-2)$ niin löytyy väliltä $(-2, 0)$ piste x_2 siten, että $f(x_2) = f(x_1)$ Bolzanon merkinvaihtolauseen nojalla.

---

3. Ratkaise likimääräisesti yhtälö $x\cos(x) + x^2 - 2 = 0$ Newtonin menetelmällä, siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-3}. Alkuarvona voit käyttää $x_0 = 0$.

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x\cos(x) + x^2 - 2$, jolloin $f'(x) = \cos(x) - x\sin(x) + 2x$. Newtonin menetelmän mukaan on silloin laskettava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n\cos(x_n) + {x_n}^2 - 2}{\cos(x_n) - x_n\sin(x_n) + 2x_n}.$$

Jos valitaan $x_0 = 0$, niin saadaan:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.00000 \\ x_1 &= 2.00000 \\ x_2 &= 1.33851 \\ x_3 &= 1.27635 \end{aligned}$$

Koska $f(x_3) = -0.00052 < 0$ ja $f(x_3 + 10^{-3}) = 0.0011 > 0$ niin nähdään merkinvaihtolauseen nojalla, että $x_3 = 1.27635$ kelpaa haetuksi likiarvoksi.

4.

(a) Laske integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(4\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t)^2}\,\mathrm{d}t$ sijoituksella $\mathrm{e}^t = x$ (ja sitten mahdollisesti toisellakin sijoituksella).

(b) Päteekö epäyhtälö $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi}{4}$? Perustele!

Ratkaisu: (a) Jos $\mathrm{e}^t = x$ niin $t = \ln(x)$ jolloin $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Jos $t = 0$ niin $x = 1$ ja kun $t = 1$ niin $x = \mathrm{e}$ joten sijoituksella e^t saadaan

$$\int_0^1 \frac{1}{(4\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{(\frac{4}{x} + x)^2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{(4 + x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Jos nyt suoritetaan sijoitus $4 + x^2 = s$ niin $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$ eli $x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}s$ ja kun $x = 1$ niin $s = 5$ ja kun $x = \mathrm{e}$ niin $s = 4 + \mathrm{e}^2$. Näin ollen saadaan

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{4 + x^2}\,\mathrm{d}x = \int_5^{4+\mathrm{e}^2} \frac{1}{2s^2}\,\mathrm{d}s = \Big/_5^{4+\mathrm{e}^2} -\frac{1}{2s} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4 + \mathrm{e}^2} + \frac{1}{10} \approx 0{,}05609820554.$$

(b) Kun $0 \le x \le 1$ niin $x^2\sqrt{x} \le x^2$ jolloin $1 + x^2\sqrt{x} \le 1 + x^2$ ja $\frac{1}{1+x^2\sqrt{x}} \ge \frac{1}{1+x^2}$. Tästä syystä

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \ge \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} = \Big/_0^1 \arctan(x) = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$
