Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
2. välikoe 14.11.2000

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Määritä raja-arvo $\lim_{x\to 0+}\big(\sin(x)\big)^x$ mikäli se on olemassa.

(b) Määritä luvun cos(1,5) likiarvo käyttäen lineaarista approksimaatiota (eli astetta 1 olevaa Taylorin polynomia) ja käyttäen hyväksi tietoa, että $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ ja $\pi \approx 3{,}1416$.

2.

(a) Funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiedetään, että se on derivoituva, $|f'(x)| \le \mathrm{e}^{-x}$ kun $x \in \mathbb{R}$ ja $|f(\pi n)| \le \ln(\frac{n+1}{n})$ kun $n \ge 10$ on kokonaisluku. Seuraako tästä, että $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$? Perustele! (Väliarvolause saattaa olla hyödyllinen.)

(b) Laske funktion $f(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$ derivaatta. Onko funktiolla f käänteisfunktio, kun f:n määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$? Perustele! Jos on, määritä käänteisfunktion määrittelyjoukko.

3. Ratkaise likimääräisesti yhtälö $x\cos(x) + x^2 - 2 = 0$ Newtonin menetelmällä, siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-3}. Alkuarvona voit käyttää $x_0 = 0$.

4.

(a) Laske integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(4\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t)^2}\,\mathrm{d}t$ sijoituksella $\mathrm{e}^t = x$ (ja sitten mahdollisesti toisellakin sijoituksella).

(b) Päteekö epäyhtälö $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \ge \frac{\pi}{4}$? Perustele!