Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
1. välikoe 16.10.2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, INF, TFY, TIK, TUO, EST, TLT, KON, KEM, MAK, PUU, ARK, MAA, MAR, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Määritä muodossa $a + \mathrm{i}b$ kaikki kompleksiluvut z jotka toteuttavat yhtälön $z^5 = -16\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$. (Lausekkeille, jotka ovat muotoa $\cos(\frac{m\pi}{n})$ ja $\sin(\frac{m\pi}{n})$ ei tarvitse laskea likiarvoja).

(b) Teekkarit A ja B laskivat erään kompleksiluvun z. Teekkari A sai vastaukseksi, että luvun argumentti eli vaihekulma on 2,345 ja teekkari B sai vastaukseksi, että luvun imaginaariosa on $-\sqrt{2}$. Laskivatko molemmat oikein? Entä mitä voidaan sanoa tuloksista jos lisäksi tiedetään, että z^2:n imaginaariosa on 1.

Ratkaisu: (a) Merkitään $w = -16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}\mathrm{i}$, jolloin $|w| = \sqrt{16^2 \cdot 2 + 16^2 \cdot 2} = 32$ ja $\arg(w) = \arctan(\frac{-16\sqrt{2}}{-16\sqrt{2}}) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$, koska $\operatorname{Re} w = -16\sqrt{2} < 0$. Jos nyt $|z| = r$ ja $\arg(z) = \theta$ niin $|z^5| = r^5$ ja $\arg(z^5) = 5\theta$. Jos $z^5 = w$, niin tästä seuraa, että $r^5 = 32$, eli $r = 2$ ja $5\theta = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$, eli $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2n\pi}{5} = \frac{5\pi + 8n\pi}{20}$. Arvoilla $n = 0, 1, 2, 3, 4$ saadaan kaikki ratkaisut, eli

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \mathrm{i}2\sin(\tfrac{\pi}{4}),\\
z_1 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{20}} = 2\cos(\tfrac{13\pi}{20}) + \mathrm{i}2\sin(\tfrac{13\pi}{20}),\\
z_2 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{21\pi}{20}} = 2\cos(\tfrac{21\pi}{20}) + \mathrm{i}2\sin(\tfrac{21\pi}{20}),\\
z_3 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{29\pi}{20}} = 2\cos(\tfrac{29\pi}{20}) + \mathrm{i}2\sin(\tfrac{29\pi}{20}),\\
z_4 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{37\pi}{20}} = 2\cos(\tfrac{37\pi}{20}) + \mathrm{i}2\sin(\tfrac{37\pi}{20}).
\end{aligned}
$$

(b) Jos $\arg(z) = 2{,}345$ niin $\operatorname{Im} z = \sin(2{,}345) > 0$ koska $\frac{\pi}{2} < 2{,}345 < \pi$ ja tämä on ristiriidassa väitteen $\operatorname{Im} z = -\sqrt{2}$ kansssa. Näin ollen ainakin toinen teekkareista on laskenut väärin. Jos $\arg(z) = 2{,}345$ niin $\arg(z^2) = 4{,}69$ ja silloin $\operatorname{Im}(z^2) = \sin(4{,}69) < 0$ koska $\pi < 4{,}69 < 2\pi$ eikä ole mahdollista, että z^2:n imaginaariosa olisi 1. Eli tässä tapauksessa teekkari A on laskenut väärin. Jos $z = a - \mathrm{i}\sqrt{2}$ niin $z^2 = a - 2 - \mathrm{i}2a\sqrt{2}$ eli jos $a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ niin $\operatorname{Im}(z^2) = 1$, eli on mahdollista että teekkari B on laskenut oikein.

---

2. Millä a:n arvoilla yhtälösysteemillä

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+x_4&=1+a\\ 6x_1+9x_2-5x_3+4x_4&=a\\ -2x_1-3x_2+5x_3-3x_4&=4+a \end{aligned}$$

on äärettömän monta ratkaisua? Määritä nämä ratkaisut näillä a:n arvoilla. Käytä Gaussin algoritmia!

Ratkaisu: Gaussin algoritmilla saadaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1+a \\ 6 & 9 & -5 & 4 & a \\ -2 & -3 & 5 & -3 & 4+a \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 - 3r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_1 \end{array}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3-2a \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 5+2a \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + 2r_2 \end{array}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1-2a \end{bmatrix}$$

Viimeisen yhtälön mukaan $0 = -1-2a$ joten ratkaisuja löytyy ainoastaan kun $-1-2a=0$ eli $a=-\frac{1}{2}$. Tässä tapauksessa nähdään, että sarakkeilla 2 ja 4 ei ole tukialkiota, joten muuttujat x_2 ja x_4 voidaan valita vapaasti, esimerkiksi $x_2 = s$ ja $x_4 = t$. Toisen yhtälön mukaan $-2x_3 + x_4 = -3-2a = -3+1 = -2$, joten $x_3 = \frac{1}{2}t + 1$. Ensimmäisen yhtälön mukaan $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 + a = \frac{1}{2}$, joten $x_1 = -\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}s - \frac{1}{4}t$. Ratkaisu on siis

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} - \frac{3}{2}s - \frac{1}{4}t \\ s \\ 1 + \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.

(a) Määritä vektoreiden $(-1,2,-3)$, $(2,-4,6)$, $(2,-2,7)$ ja $(1,0,4)$ virittämän vektoriavaruuden jokin kanta sekä tämän avaruuden dimensio.

(b) Oletetaan, että A ja B ovat $n \times n$ matriiseja, jotka eivät ole nolla-matriiseja, mutta, jotka toteuttavat yhtälön $AB = 0$. Mitä voidaan sanoa luvuista $\det(A)$ ja $\det(B)$? Perustele!

Ratkaisu: (a) Kirjoitetaan vektorit matriisin pystyvektoreina jolloin saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Tähän matriisiin sovelletaan Gaussin algoritmia, ja saadaan

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 - \frac{1}{2}r_2 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Koska haetaan pystyvektoreiden virittämän avaruuden kanta, ja koska tukialkioit sijaitsevat pystysarakkeilla 1 ja 3, niin kantavektoreiksi voidaan valita vastaavat pystyvektorit alkuperäisestä matriisista, jolloin kannaksi saadaan $(-1, 2, -3)$ ja $(2, -2, 7)$. Koska kannassa on 2 vektoria, niin dimensio on 2.

Jos kirjoitetaan vektorit matriisin vaakavektoreina jolloin saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Tähän matriisiin sovelletaan Gaussin algoritmia, ja saadaan

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 + 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + 2r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + r_1 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_2 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Koska haetaan vaakavektoreiden virittämän avaruuden kanta, ja koska tukialkioit sijaitsevat vaakariveillä 1 ja 2, niin kantavektoreiksi voidaan valita vastaavat vaakavektorit porrasmuotisesta matriisista, jolloin kannaksi saadaan $(-1, 2, -3)$ ja $(0, 2, 1)$.

(b) Jos $\det(A) \neq 0$ niin A:lla on käänteismatriisi A^{-1} ja koska $AB = 0$ niin saadaan $B = IB = A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0$. Tämä on ristiriita koska oletettiin että $B \neq 0$. Jos

$\det(B) \neq 0$ niin B:llä on käänteismatriisi B^{-1} jolloin $A = AI = ABB^{-1} = 0B^{-1} = 0$ ja tämä on taas ristiriita koska $A \neq 0$. Näin ollen pätee $\det(A) = \det(B) = 0$.

4.

(a) Tutki ja piirrä käyrä $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 5 = 0$.

(b) Olkoon

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Määritä matriisi B^n, kun $n \geq 1$, käyttäen diagonalisointia (ja mikäli mahdollista, (a)-kohdan tuloksia).

Ratkaisu: (a) Muodostetaan ensin neliömuodon matriisi, joka on

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan seuraavaksi tämän matriisin ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} (3-\lambda) & 2 \\ 2 & (3-\lambda) \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Tästä saadaan ratkaisuksi,

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{9-5} = \begin{cases} 5, \\ 1, \end{cases}$$

joten nähdään, että ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 5$ ja $\lambda_2 = 1$.

Seuraavaksi lasketaan ominaisarvoon $\lambda_1 = 5$ liittyvä ominaisvektori, eli ratkaistaan yhtälö $(A - 5I)X = 0$. Gaussin menetelmällä saadaan,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad r_2 \leftarrow r_2 + r_1 \\ \sim &\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että jos valitaan $x_2 = 1$ niin x_1:n ratkaisuksi yhtälöstä $-2x_1 + 2 = 0$ saadaan $x_1 = 1$. Ominaisvektoriksi voidaan siis valita $[1, 1]^{\mathrm{T}}$, tai koska halutaan, että sen pituus on 1, $X_1 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^{\mathrm{T}}$. Ominaisarvoon $\lambda_2 = 1$ liittyvä ominaisvektori on kohtisuorassa vektoria X_1 vastaan, joten voidaan valita $X_2 = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^{\mathrm{T}}$. Ominaisvektoreista muodostetaan matriisi

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Uudet koordinaatit x' ja y' määritellään kaavalla

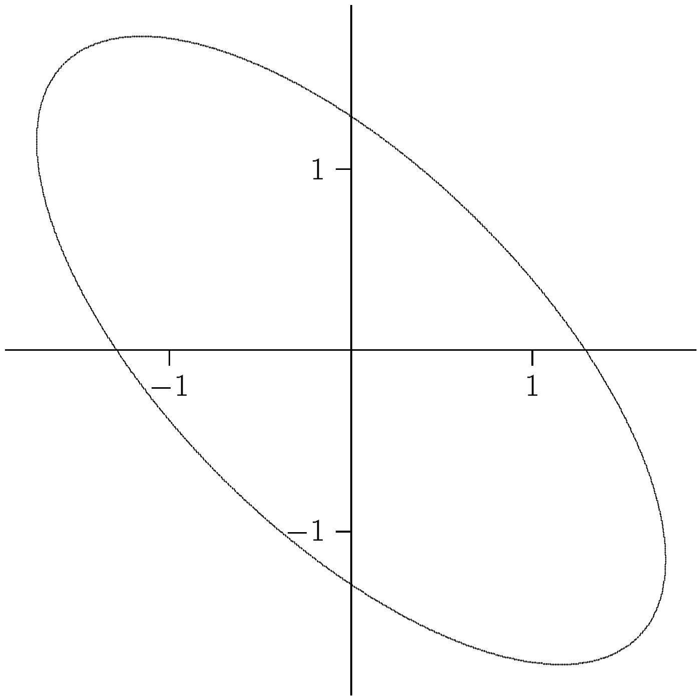
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Koska V on valittu ortogonaaliseksi niin $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 5{x'}^2 + {y'}^2$. Uudessa koordinaattisysteemissä yhtälö on siis $5{x'}^2 + {y'}^2 = 5$, eli

$$ {x'}^2 + \frac{{y'}^2}{\sqrt{5}^2} = 1, $$

josta nähdään, että kyseessä on ellipsi jonka pääakselit ovat 1 ja $\sqrt{5}$.

Koska uudet x'- ja y'-koordinaattiakselit ovat ominaisvektoreiden suuntaisia, niin käyrä näyttää suunnilleen tällaiselta:



(b) Huomataan, että $B = 2A$ missä matriisi A on (a)-kohdassa esiintyvä matriisi. Koska A:n ominaisvektoreista muodostettu matriisi V on ortogonaalinen ($V^{\mathrm{T}} = V^{-1}$) ja A:n ominaisarvot ovat 5 ja 1 niin

$$ A = V \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V^{\mathrm{T}}. $$

Näin ollen

$$ \begin{aligned} B^n = 2^n A^n = 2^n V \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V^{\mathrm{T}} V \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V^{\mathrm{T}} \cdot \ldots \cdot V \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V^{\mathrm{T}} \\ = 2^n V \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n V^{\mathrm{T}} = 2^n V \begin{bmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V^{\mathrm{T}}. \end{aligned} $$

Koska

$$ V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. $$

niin saadaan

$$ B^n = 2^{n-1} \begin{bmatrix} (5^n + 1) & (5^n - 1) \\ (5^n - 1) & (5^n + 1) \end{bmatrix}. $$