Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 4.9.2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, INF, TFY, TIK, TUO, EST, TLT, KON, KEM, MAK, PUU, ARK, MAA, MAR, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1. Olkoon $w = -1 + \mathrm{i}$.

(a) Määritä w:n moduuli (eli itseisarvo) ja argumentti (eli vaihekulma).

(b) Määritä kaikki kompleksiluvut z, jotka toteuttavat yhtälön $z^3 = \overline{w}$. (Huom! $\overline{w}$ eikä w.)

Ratkaisu: (a) Kompleksiluvun w moduuli eli itseisarvo on $|w| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. koska $\operatorname{Re} w = -1 < 0$ niin kompleksiluvun w argumentti $\arg w = \arctan(\frac{-1}{1}) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$. Kaikki luvut $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ missä n on kokonaisluku kelpaavat myös argumentiksi.
(b) Olkoon z sellainen, että $z^3 = \overline{w}$ ja merkitään $|z| = r$ ja $\arg z = \varphi$. Silloin $|z^3| = r^3$ ja $\arg(z^3) = 3\varphi$. Koska $z^3 = \overline{w}$ ja $|\overline{w}| = \sqrt{2}$ ja $\arg(\overline{w}) = -\frac{3\pi}{4}$, niin

$$\begin{aligned} 3\varphi &= -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \\ r^3 &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Näin ollen $\varphi = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$ ja $r = \sqrt[6]{2}$. Saadaan 3 eri ratkaisua

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[6]{2}\big(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{4})\big) = 0.7937 - 0.7937\mathrm{i}, \\ z_1 &= \sqrt[6]{2}\big(\cos(-\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2\pi}{3})\big) = 0.2905 + 1.0842\mathrm{i}, \\ z_1 &= \sqrt[6]{2}\big(\cos(-\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{4\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{4\pi}{3})\big) = -1.0842 - 0.2905\mathrm{i}. \end{aligned}$$

---

2. Päättele Gaussin algoritmia käyttäen millä vakion a arvolla yhtälöryhmällä

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + ax_3 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

on äärettömän monta ratkaisua? Hae nämä ratkaisut. Mikä on tässä tapauksessa kerroinmatriisin rangi? Perustele!

Ratkaisu: Ratkaistaan yhtälösysteemi Gaussin algoritmilla jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & a & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ r_2 \leftarrow r_2 - \frac{1}{2}r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & (a-\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad r_3 \leftarrow r_3 - \frac{2}{5}r_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & (a-\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{6}{5}-\frac{2}{5}a) & 0 \end{bmatrix}$$

Tästä nähdään, että yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua jos ja vain jos $\frac{6}{5} - \frac{2}{5}a = 0$ eli $a = 3$. Tässä tapauksessa voidaan vailta x_3 vapaasti, esim. $x_3 = t$ jolloin toisen yhtälön mukaan $\frac{5}{2}x_2 + \frac{5}{2}t = 0$ eli $x_2 = -2$. Sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön saadaan $2x_1 - 3t + t = 0$ eli $x_1 = t$. Ratkaisut ovat siis

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kun $a = 3$ on matriisin porrasmuodossa 2 riviä joilla on nollasta poikkeavia elementtejä, eli matriisin rangi on 2.

---

3. Osoita, että yhtälöllä $x^2 + \ln(x) - 3 = 0$ on yksikäsitteinen positiivinen ratkaisu. Hae Newtonin menetelmällä ratkaisun approksimaatio siten, että virheen itseisarvo on pienempi kuin 10^{-6}.

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x^2 + \ln(x) - 3$ jolloin $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ josta nähdään, että $f'(x) > 0$ kun $x > 0$. Tästä seuraa, että f on aidosti kasvava välillä $(0, \infty)$ ja erikoisesti, jos x_1 ja x_2 ovat kaksi positiivista lukua, siten, että $f(x_1) = f(x_2) = 0$ niin $x_1 = x_2$ (koska jos esimerkiksi $x_1 < x_2$ niin $0 = f(x_1) < f(x_2) = 0$ mikä on ristiriita). . Koska $f(1) = 1 - \ln(1) - 3 = -2 < 0$ ja $f(2) = 4 + \ln(2) - 3 > 1 > 0$, ja f on jatkuva, niin merkinvaihtolauseesta seuraa, että löytyy piste $x_* \in (1, 2)$ siten että $f(x_*) = 0$.

Newtonin menetelmän mukaisesti lasketaan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 + \ln(x_n) - 3}{2x_n + \frac{1}{x_n}},$$

ja saadaan kun esimerkiksi valitaan $x_0 = 1$,

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ x_1 &= 1{,}66666667, \\ x_2 &= 1{,}59329292, \\ x_3 &= 1{,}59214322, \\ x_4 &= 1{,}59214294 \end{aligned}$$

Koska $f(1{,}59214294) = 1{,}1 \cdot 10^{-8}$ ja $f(1{,}59214294) - 10^{-6}) = -3{,}8 \cdot 10^{-6}$ niin nähdään, että $x_* \in (1{,}59214294) - 10^{-6}, 1{,}59214294))$ joten $|x_4 - x_*| < 10^{-6}$.

---

4. Approksimoi funktiota $y = xe^{-x^2}$ polynomilla siten, että virhe välillä $[0, \frac{1}{2}]$ on itseisarvoltaan pienempi kuin 0,01.

Ratkaisu: Jos löytyy polynomi p siten, että

$$|e^{-t} - p(t)| < 0{,}02, \quad t \in [0, \tfrac{1}{4}],$$

niin silloin $q(x) = xp(x^2)$ on myös polynomi ja

$$|xe^{-x^2} - q(x)| = |x||e^{-x^2} - p(x^2)| < \tfrac{1}{2} \cdot 0,02 = 0{,}01, \quad x \in [0, \tfrac{1}{2}].$$

Jos $t \in [0, \frac{1}{4}]$ niin Taylorin kehitelmän mukaan päätee, koska $\frac{d^k}{dt^k} e^{-t} = (-1)^k e^{-t}$,

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} t^k + \frac{(-1)^n e^{-\theta}}{(n)!} t^n, \quad \theta \in [0, t].$$

Koska

$$\left| \frac{(-1)^n e^{-\theta}}{(n)!} t^n \right| < \frac{(\frac{1}{4})^n}{n!}, \quad t \in [0, \tfrac{1}{4}], \quad \theta \in [0, t],$$

niin

$$\left| efn^{-t} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} t^k \right| < \frac{(\frac{1}{4})^n}{n!}, \quad t \in [0, \tfrac{1}{4}].$$

Jos valitaan $n = 3$ niin $\frac{(\frac{1}{4})^n}{n!} < 0{,}02$ ja polynomiksi kelpaa siis

$$q(x) = x \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} \right) = x - x^3 + \frac{x^5}{2}.$$

5.

(a) Laske integraali $\int_{\ln(\frac{1}{2})}^{0} \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, dx$ sijoituksella $e^x = t$.

(b) Laske integraalin $\int_{-2}^{0} \frac{x^2}{1+e^x} \, dx$ likiarvo Simpsonin menetelmällä käyttäen 8 yhtä pitkää osaväliä.

Ratkaisu: (a) jos $e^x = t$ niin $e^x \, dx = dt$, kun $x = 0$ niin $t = 1$ ja kun $x = \ln(\frac{1}{2})$ niin $t = \frac{1}{2}$. Siis,

$$\int_{\ln(\frac{1}{2})}^{0} \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t}{1+t} \, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= \Big/_{\frac{1}{2}}^{1} (t - \ln(1+t)) = 1 - \ln(2) - \tfrac{1}{2} + \ln(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2} + \ln(\tfrac{3}{4}).$$

(b) Simpsonin menetelmän mukaan

$$S_8 = \frac{2-0}{3\cdot 8}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+2f(x_6)+4f(x_7)+f(x_8)\Big),$$

missä $f(x) = \frac{x^2}{1+\mathrm{e}^x}$ ja $x_j = -2 + j\frac{0-(-2)}{8} = -2 + \frac{j}{4}$. Silloin saadaan

$$\begin{aligned} S_8 = \frac{1}{12}\big(&3{,}5232 + 4\cdot 2{,}6091 + 2\cdot 1{,}8395 + 4\cdot 1{,}2145 + 2\cdot 0{,}7311 + 4\cdot 0{,}3820 \\ &+ 2\cdot 0{,}1556 + 4\cdot 0{,}0351 + 0\big) = 2{,}1616. \end{aligned}$$
