Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti 4.9.2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (AUT, INF, TFY, TIK, TUO, EST, TLT, KON, KEM, MAK, PUU, ARK, MAA, MAR, RYK);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1. Olkoon $w = -1 + \mathrm{i}$.

(a) Määritä w:n moduuli (eli itseisarvo) ja argumentti (eli vaihekulma).

(b) Määritä kaikki kompleksiluvut z, jotka toteuttavat yhtälön $z^3 = \overline{w}$. (Huom! $\overline{w}$ eikä w.)

2. Päättele Gaussin algoritmia käyttäen millä vakion a arvolla yhtälöryhmällä

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + ax_3 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

on äärettömän monta ratkaisua? Hae nämä ratkaisut. Mikä on tässä tapauksessa kerroinmatriisin rangi? Perustele!

3. Osoita, että yhtälöllä $x^2 + \ln(x) - 3 = 0$ on yksikäsitteinen positiivinen ratkaisu. Hae Newtonin menetelmällä ratkaisun approksimaatio siten, että virheen itseisarvo on pienempi kuin 10^{-6}.

4. Approksimoi funktiota $y = x\mathrm{e}^{-x^2}$ polynomilla siten, että virhe välillä $[0, \frac{1}{2}]$ on itseisarvoltaan pienempi kuin 0,01.

5.

(a) Laske integraali $\int_{\ln(\frac{1}{2})}^{0} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$ sijoituksella $\mathrm{e}^x = t$.

(b) Laske integraalin $\int_{-2}^{0} \frac{x^2}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$ likiarvo Simpsonin menetelmällä käyttäen 8 yhtä pitkää osaväliä.