Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 15.4.2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Aut, Inf, Tfy, Tik, Tuo, Säh, Kon, Kem, Mak, Puu, Ark, Maa, Mar, Ryk);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Määritä kompleksiluvun $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ itseisarvo eli moduuli ja argumentti eli vaihekulma.

(b) Mikä on suoran $\operatorname{Im} z = 1$ kuva kuvauksessa $z \mapsto \dfrac{\mathrm{i}z+1}{z-1-\mathrm{i}}$?

Ratkaisu: (a)

$$|-1+\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{1+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2,$$

ja koska $\operatorname{Re}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}) = -1 < 0$ niin

$$\arg(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = -\arctan(\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Argumentiksi kelpaa myös mikä tahansa luku $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ missä n on kokonaisluku.
(b) Valitaan luvut $-1+\mathrm{i}$, i ja $1+\mathrm{i}$ suoralta $\operatorname{Im} z = 1$. Koska $z = 1+\mathrm{i}$ kuvautuu äärettömyyteen päätellään että suoran kuva on taas suora, eikä ympyrä. Pisteen $-1+\mathrm{i}$ kuva on

$$\frac{\mathrm{i}(-1+\mathrm{i})+1}{-1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i}} = \tfrac{1}{2}\mathrm{i},$$

ja pisteen i kuva on vastaavasti

$$\frac{\mathrm{i}^2+1}{\mathrm{i}-1-\mathrm{i}} = 0.$$

Tästä päätellään, että suoran $\operatorname{Im} z = 1$ kuva on imaginaariakseli $\operatorname{Re} z = 0$.

---

2. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit. Olkoon c_n matriisin A^n elementti $(1,2)$. Mikä on $\lim_{n\to\infty} c_n$? Perustele lyhyesti vastauksesi!
Ratkaisu: Lasketaan ensin ominaisarvot:

$$0 = \det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(-\tfrac{1}{2}-\lambda) + \tfrac{1}{2} = \lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda,$$

josta seuraa, että ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 0$ ja $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Lasketaan ensin ominaisarvoon $\lambda_1 = 0$ liittyvä ominaisvektori, jolloin on ratkaistava systeemi

$$AX_1 = 0,$$

eli

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

josta näkee, että jos $X_1 = [x, y]^{\mathrm{T}}$ niin $x + \frac{1}{2}y = 0$ eli jos valitaan $y = 2$ niin $x = -1$ jolloin ominaisvektoriksi saadaan

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan ensin ominaisarvoon $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ liittyvä ominaisvektori, jolloin on ratkaistava systeemi

$$(A - \tfrac{1}{2}I)X_2 = 0,$$

eli

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

josta näkee, että jos $X_2 = [x, y]^{\mathrm{T}}$ niin $x + y = 0$ eli jos valitaan $x = 1$ niin $y = -1$ jolloin ominaisvektoriksi saadaan

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Jos merkitään $V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ niin

$$A = V \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} V^{-1},$$

jolloin

$$A^n = V \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{bmatrix} V^{-1}.$$

Koska $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ niin nähdään, että $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

3.

(a) Ratkaise yhtälö $x^2 = \ln(x^2 + 2)$ likimääräisesti Newtonin menetelmällä laskemalla 3 iteraatioaskelta alkuarvolla $x_0 = 1$.

(b) Linda sai (toisella alkuarvolla) saman yhtälön likimääräiseksi ratkaisuksi `x = 1,0707`. Arvioi, (ja perustele), miten suuri virhe Lindan ratkaisussa korkeintaan on.

Ratkaisu: (a) Olkoon $f(x) = x^2 - \ln(x^2 + 2)$ jolloin on haettava f:n nollakohtaa. Newtonin menetelmän mukaan lasketaan luvut x_1, x_2, jne. kaavasta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

ja koska $f'(x) = 2x - \frac{2x}{x^2+2} = \frac{2x(x^2+1)}{x^2+2}$ niin saadaan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^2 - \ln(x_n^2+2))(x_n^2+2)}{2x_n(x_n^2+1)}.$$

nyt saadaan

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1{,}073959 \\ x_2 &= 1{,}070611 \\ x_3 &= 1{,}070604 \end{aligned}$$

(b) Koska $f(1) = 1 - \ln(3) < 0$ ja $f(1{,}070) = 1{,}4 \cdot 10^{-4} > 0$ niin nähdään, että ratkaisulle x_∞ pätee $1 < x_\infty < 1{,}0707$. Kun $x \geq 1$ niin $f'(x) \geq \frac{2(x^2+1)}{x^2+2} = 2(1 - \frac{1}{x^2+2}) \geq \frac{4}{3}$. Väliarvolauseen nojalla $f(x_\infty) - f(1{,}0707) = f'(y)(x_\infty - 1{,}0707)$ ja koska $f(x_\infty) = 0$ niin saadaan

$$0 \leq 1{,}0707 - x_\infty \leq \frac{3}{4} \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-4} \approx 1{,}05 \cdot 10^{-4}.$$

---

4. Määritä integraalin $\int_0^2 \sin(\pi x^2/4)\,\mathrm{d}x$ likiarvo käyttäen Simpsonin sääntöä ja 8 osaväliä. Montako prosenttia virheen yläraja (standardimenetelmällä laskettuna) pienenee, jos käytettäisiin 12 osaväliä?

Ratkaisu: Simpsonin menetelmän mukaan

$$S_8 = \frac{2-0}{3\cdot 8}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+2f(x_6)+4f(x_7)+f(x_8)\Big),$$

missä $f(x) = \sin(\frac{\pi x^2}{4})$ ja $x_j = j\frac{2-0}{8} = \frac{j}{4}$. Silloin saadaan

$$\begin{aligned} S_8 = \frac{1}{12}\big(0 &+ 4\cdot 0{,}0491 + 2\cdot 0{,}1951 + 4\cdot 0{,}4276 + 2\cdot 0{,}7071 + 4\cdot 0{,}9415 \\ &+ 2\cdot 0{,}9808 + 4\cdot 0{,}6716 + 0\big) = 1{,}0104. \end{aligned}$$

Simpsonin menetelmän virheen yläraja (standardimenetelmällä laskettuna) on $\frac{c}{n^4}$ missä n on osavälien lukumäärä ja c on tietty vakio. Jos käytetään 8 osaväliä tämä yläraja on $\frac{c}{4096}$ ja jos käytetään 12 niin se on $\frac{c}{20736}$ ja koska $\frac{1}{20736} \approx 0{,}19753\frac{1}{4096}$ niin virheen yläraja on noin 80 % pienempi.

5.

(a) Määritä Newtonin interpolointikaavalla, eli käyttäen jaettuja erotuksia, toisen asteen polynomi p, jolle pätee $p(-3) = -2$, $p(-2) = 0$ ja $p(0) = 2$. (Jos et tätä osaa, määritä tämä polynomi jollain muulla tavalla.)

(b) Funktiosta f tiedetään, että $|f(t)| \leq |t|^2\big|\ln(\sin(|t|))\big|$ kun $0 < |t| \leq 1$. Mitä voidaan varmuudella sanoa raja-arvoista $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\sin(t)}$ ja $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^2}$.

Ratkaisu: (a) Jaetut erotukset lasketaan seuraavan kaavion avulla:

$$\begin{array}{cccc}
x_i & f[x_i] & f[x_i,x_j] & f[x_i,x_j,x_k] \\
-3 & -2 & & \\
 & & 2 & \\
-2 & 0 & & -\frac{1}{3} \\
 & & 1 & \\
0 & 2 & &
\end{array}$$

Haettava polynomi on

$$\begin{aligned}
p(x) = f[x_0] + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\
+ (x-x-0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
= -2 + 2(x+3) - \tfrac{1}{3}(x+3)(x+2) = 2 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}x^2.
\end{aligned}$$

(b) Oletuksesta seuraa, että

$$\left|\frac{f(t)}{sin(t)}\right| \leq \left|\frac{t}{\sin(t)}\right|^2 |\sin(t)|\big|\ln(\sin(|t|))\big|, \quad 0 < |t| \leq 1.$$

Koska $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$ niin $\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(t)} = 1$ ja $\lim_{t\to 0}\left|\frac{t}{\sin(t)}\right|^2 = 1$. Koska lisäksi $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ ja $\lim_{t\to 0}\sin(t) = 0$ niin $\lim_{t\to 0}|\sin(t)|\big|\ln(\sin(|t|))\big| = \lim_{t\to 0}\sin(|t|)\big|\ln(\sin(|t|))\big| = 0$ ja päätellään kuristusperiaatteen nojalla, että

$$\lim_{t\to}\frac{f(t)}{\sin(t)} = 0.$$

Jos $f(t) = 0$ kaikilla t niin oletettu epäyhtälö on voimassa ja $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^2} = 0$. Toisaalta jos $f(t) = \sin(\frac{1}{t})t^2\ln(\sin(1))$ niin epäyhtälö on myös voimassa koska $1 \geq \sin(1) \geq \sin(|t|)$ kun $0 < |t| \leq 1$ jolloin $|\ln(\sin(|t|))| \geq |\ln(\sin(1))|$. Mutta tässä tapauksessa $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^2}$ ei ole olemassa, jotain varmuudella ei voida sanoa yhtään mitään raja-arvosta $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^2}$.
