Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 15.4.2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Aut, Inf, Tfy, Tik, Tuo, Säh, Kon, Kem, Mak, Puu, Ark, Maa, Mar, Ryk);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Määritä kompleksiluvun $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ itseisarvo eli moduuli ja argumentti eli vaihekulma.

(b) Mikä on suoran $\operatorname{Im} z = 1$ kuva kuvauksessa $z \mapsto \dfrac{\mathrm{i}z+1}{z-1-\mathrm{i}}$?

2. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit. Olkoon c_n matriisin A^n elementti $(1,2)$. Mikä on $\lim_{n\to\infty} c_n$? Perustele lyhyesti vastauksesi!

3.

(a) Ratkaise yhtälö $x^2 = \ln(x^2+2)$ likimääräisesti Newtonin menetelmällä laskemalla 3 iteraatioaskelta alkuarvolla $x_0 = 1$.

(b) Linda sai (toisella alkuarvolla) saman yhtälön likimääräiseksi ratkaisuksi `x = 1,0707`. Arvioi, (ja perustele), miten suuri virhe Lindan ratkaisussa korkeintaan on.

4. Määritä integraalin $\int_0^2 \sin(\pi x^2/4)\,\mathrm{d}x$ likiarvo käyttäen Simpsonin sääntöä ja 8 osaväliä. Montako prosenttia virheen yläraja (standardimenetelmällä laskettuna) pienenee, jos käytettäisiin 12 osaväliä?

5.

(a) Määritä Newtonin interpolointikaavalla, eli käyttäen jaettuja erotuksia, toisen asteen polynomi p, jolle pätee $p(-3)=-2$, $p(-2)=0$ ja $p(0)=2$. (Jos et tätä osaa, määritä tämä polynomi jollain muulla tavalla.)

(b) Funktiosta f tiedetään, että $|f(t)| \le |t|^2 \big|\ln(\sin(|t|))\big|$ kun $0 < |t| \le 1$. Mitä voidaan varmuudella sanoa raja-arvoista $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{\sin(t)}$ ja $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^2}$.