Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin
Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1
Tentti 11.1.2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Aut, Inf, Tfy, Tik, Tuo, Säh, Kon, Kem, Mak, Puu, Ark, Maa, Mar, Ryk);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Määritä (muodossa $a+\mathrm{i}b$) funktion $\ln(-\sqrt{3}+\mathrm{i})$ kaikki arvot, eli yhtälön $\mathrm{e}^z = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$ kaikki ratkaisut.

(b) Olkoon $w = 1-\mathrm{i}$. Määritä luvun $\frac{w^2-\mathrm{i}}{\overline{w}}$ reaaliosa ja luvun e^{w^2} imaginaariosa.

Ratkaisu: (a) Todetaan, että $|-\sqrt{3}+\mathrm{i}| = \sqrt{3+1} = 2$ ja $\arg(-\sqrt{3}+\mathrm{i}) = \arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})+\pi = \frac{5}{6}\pi$ (koska $\mathrm{Re}\,(-\sqrt{3}+\mathrm{i}) < 0$). Jos nyt $z = a+\mathrm{i}b$ niin $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^a$ ja $\arg(\mathrm{e}^z) = b$ joten jos $\mathrm{e}^z = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$ niin $a = \ln(2)$ ja $b = \frac{5}{6}\pi + 2n\pi$. Siis

$$\ln(-\sqrt{3}+\mathrm{i}) = \ln(2) + \mathrm{i}(\tfrac{5}{6}\pi + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Jos $w = 1-\mathrm{i}$ niin $w^2 = -2\mathrm{i}$ ja

$$\frac{w^2-\mathrm{i}}{\overline{w}} = \frac{-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{1+1} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i},$$

joten $\mathrm{Re}\,(\frac{w^2-\mathrm{i}}{\overline{w}}) = -\frac{3}{2}$. Eulerin kaavan nojalla

$$\mathrm{e}^{w^2} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}} = \cos(-2) + \mathrm{i}\sin(-2),$$

joten $\mathrm{Im}\,(\mathrm{e}^{w^2}) = -\sin(2)$.

2.

(a) Hae yhtälösysteemin $AX = B$ kaikki ratkaisut kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & -5 \\ -2 & -6 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 13 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

(b) Jos A ja B ovat kaksi säännöllistä $n\times n$-matriisia, joille pätee $AB = BA$, niin seuraako tästä välttämättä, että $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$? (Perustele!)

Ratkaisu: (a) Gaussin algoritmilla saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -4 & -5 & -1 \\ -2 & -6 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 13 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + 2r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 3r_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + \frac{1}{3}r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 + \frac{2}{3}r_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - 4r_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Koska toisessa sarakkeessa ei ole tukialkiota voidaan x_2 valita vapaasti, eli merkitään $x_2 = t$. Yhtälösysteemin mukaan $4x_4 = 8$ joten $x_4 = 2$ ja sijoittamalla tämä tulos yhtälöön $-6x_3 - 9x_4 = -3$ saadaan $x_3 = -\frac{5}{2}$ ja yhtälöstä $x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$ saadaan silloin $x_1 = -3t + \frac{5}{2} - 4 + 1$ eli

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Jos $AB = BA$ niin $A^{-1}AB = A^{-1}BA$ eli $B = A^{-1}BA$ ja silloin $BA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1}$ eli $BA^{-1} = A^{-1}B$. Tällöin $B^{-1}BA^{-1} = B^{-1}A^{-1}B$ eli $A^{-1} = B^{-1}A^{-1}B$ ja silloin $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}BB^{-1}$ josta seuraa, että $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.

(a) Määritä raja-arvo $\lim_{x\to 0} \dfrac{(f(x)-x)^2}{\sin(x)^2 - x^2}$ kun tiedetään, että $f(x) = x - 2x^2 + O(x^3)$ kun $x \to 0$.

(b) Määritä funktion $\ln(3x)$ astetta 3 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = \frac{1}{3}$.

Ratkaisu: Jos $f(x) = x - 2x^2 + O(x^3)$ kun $x \to 0$ niin $(f(x)-x)^2 = (-2x^2 + O(x^3))^2 = 4x^4 - 4x^2O(x^3) + O(x^3)^2 = 4x^4 + O(x^5)$. Koska $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ niin $\sin(x)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + 2xO(x^5) + \frac{1}{36}x^6 - \frac{1}{3}x^3O(x^5) + O(x^5)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^5)$ joten $\sin(x)^2 - x^2 = -\frac{1}{3}x^4 + O(x^5)$. Näin ollen saadaan

$$\lim_{x\to 0} \frac{(f(x)-x)^2}{\sin(x)^2 - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^4 + O(x^5)}{-\frac{1}{3}x^4 + O(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{4 + O(x)}{-\frac{1}{3} + O(x)} = \frac{4}{-\frac{1}{3}} = -12.$$

(b) Koska

$$\ln(t+1) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4),$$

niin

$$\begin{aligned}\ln(3x) = \ln(3(x-\tfrac{1}{3})+1) &= 3(x-\tfrac{1}{3}) - \frac{(3(x-\frac{1}{3}))^2}{2} + \frac{(3(x-\frac{1}{3}))^3}{3} + O((3(x-\tfrac{1}{3}))^4) \\ &= -\frac{11}{6} - 9x - \frac{27}{2}x^2 + 9x^3 + O((x-\tfrac{1}{3})^4).\end{aligned}$$

Taylorin polynomin yksikäsitteisyyden nojalla funktion $\ln(3x)$ astetta 3 oleva Taylorin polynomi on siis $-\frac{11}{6} - 9x - \frac{27}{2}x^2 + 9x^3$.

4.

(a) Kirjoita integraali $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ muotoon $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ missä $-\infty < a < b < \infty$ ja f on ainakin 4 kertaa jatkuvasti derivoituva funktio suorittamalla muuttujanvaihto $x = t^m$ missä m on sopiva positiivinen tai negatiivinen kokonaisluku. Integraalia ei tarvitse laskea.

(b) Kun integraalia $\int_0^5 g(x)\,\mathrm{d}x$ laskettiin numeerisesti käyttäen 8 osaväliä saatiin virhearvioiksi $5\cdot 10^{-2}$ kun käytettiin suunnikassääntöä ja $6\cdot 10^{-8}$ kun käytettiin Simpsonin sääntöä. Mitä saadaan virhearvioiksi jos käytetään 20 osaväliä?

Ratkaisu: (a) Suoritetaan muuttujanvaihto $x = t^{-2}$ jolloin $t = \infty$ kun $x = 1$, $t = 0$ kun $x = \infty$ ja $\mathrm{d}x = -2t^{-3}\,\mathrm{d}t$. Näin ollen

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 \frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^4}}\frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t.$$

Funktio $\frac{2}{t^4+1}$ on selvästikin äärettömän monta kertaa derivoituva.
(b) Suunnikassäännön virhearvio on $C_1 n^{-2}$ missä n on osavälien lukumäärä ja Simpsonin säännön virhearvio on vastaavasti muotoa $C_2 n^{-4}$. Jos nyt käytetään 20 osaväliä 8:n sijasta niin sunnikassännön virhearvio muuttuu tekijällä $\frac{8^2}{20^2} = \frac{4}{25} = 0.16$ jolloin uudeksi virhearvioksi saadaan $0.16\cdot 5\cdot 10^{-2} = 8\cdot 10^{-3}$. Vastaavasti Simpsonin säännön virhearvio tulee kerrotuksi luvulla $\frac{8^4}{20^4} = 0.0256$ ja uudeksi virhearvioksi saadaan $0.0256\cdot 6\cdot 10^{-8} = 1.536\cdot 10^{-9}$.

5.

(a) Millä parametrin a arvoilla suora $x - a = \frac{y-1}{a} = 2z + 2$ on jonkin pisteiden $(1,2,3)$ ja $(3,3,1)$ kautta kulkevan tason normaalin suuntainen?

(b) Laske vektoreiden $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ristitulo $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Ratkaisu: (a) Suoran $x - a = \frac{y-1}{a} = 2z+2$ suuntavektori on $\mathbf{v} = \mathbf{i} + a\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$ ja tämä suora on pisteiden $(1,2,3)$ ja $(3,3,1)$ kautta kulkevan tason normaalin suuntainen jos suuntavektori $\mathbf{v}$ on kohtisuorassa vektoria $3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}-(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}) = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ vastaan. Näin on jos $0 = \mathbf{v}\cdot(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = 2 + a - 1$ eli $a = -1$.
(b)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (6+1)\mathbf{i} + (1-3)\mathbf{j} + (1+2)\mathbf{k} = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$
