Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Salin

Mat-1.421 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti 11.1.2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero (jos välikoe), päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Aut, Inf, Tfy, Tik, Tuo, Säh, Kon, Kem, Mak, Puu, Ark, Maa, Mar, Ryk);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus

1.

(a) Määritä (muodossa $a+\mathrm{i}b$) funktion $\ln(-\sqrt{3}+\mathrm{i})$ kaikki arvot, eli yhtälön $\mathrm{e}^z = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$ kaikki ratkaisut.

(b) Olkoon $w = 1-\mathrm{i}$. Määritä luvun $\frac{w^2-\mathrm{i}}{\overline{w}}$ reaaliosa ja luvun e^{w^2} imaginaariosa.

2.

(a) Hae yhtälösysteemin $AX = B$ kaikki ratkaisut kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & -5 \\ -2 & -6 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 13 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

(b) Jos A ja B ovat kaksi säännöllistä $n \times n$-matriisia, joille pätee $AB = BA$, niin seuraako tästä välttämättä, että $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$? (Perustele!)

3.

(a) Määritä raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(f(x)-x)^2}{\sin(x)^2 - x^2}$ kun tiedetään, että $f(x) = x - 2x^2 + O(x^3)$ kun $x \to 0$.

(b) Määritä funktion $\ln(3x)$ astetta 3 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = \frac{1}{3}$.

4.

(a) Kirjoita integraali $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ muotoon $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ missä $-\infty < a < b < \infty$ ja f on ainakin 4 kertaa jatkuvasti derivoituva funktio suorittamalla muuttujanvaihto $x = t^m$ missä m on sopiva positiivinen tai negatiivinen kokonaisluku. Integraalia ei tarvitse laskea.

(b) Kun integraalia $\int_0^5 g(x)\,\mathrm{d}x$ laskettiin numeerisesti käyttäen 8 osaväliä saatiin virhearvioiksi $5\cdot 10^{-2}$ kun käytettiin suunnikassääntöä ja $6\cdot 10^{-8}$ kun käytettiin Simpsonin sääntöä. Mitä saadaan virhearvioiksi jos käytetään 20 osaväliä?

5.

(a) Millä parametrin a arvoilla suora $x - a = \frac{y-1}{a} = 2z + 2$ on jonkin pisteiden $(1,2,3)$ ja $(3,3,1)$ kautta kulkevan tason normaalin suuntainen?

(b) Laske vektoreiden $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ristitulo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.