4 Ajasta riippuvista tehtävistä ; Paraboliset tehtävät

4.1. Differenssimenetelmät

Yksinkertaisin lähestymistapa parabolisiin tehtävään on erottaa aika- ja paikkadiskretointi. Tässä lähdemme siitä, että paikkadiskretointi perustuu elementtimenetelmään, mutta ajassa käytetään differenssejä.

Differenssimenetelmien perusidea on approksimoida derivaatta-operaattoria jollain diskreetillä operaattorilla:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_d) \simeq \frac{1}{h}\left[\varphi(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_d) - \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots x_d)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\varphi(x_i + h) - \varphi\right]$$

Esimerkkejä:

$$D_i^+ \varphi = \frac{1}{h}\left[\varphi(x_i + h) - \varphi\right]$$

$$D_i^- \varphi = \frac{1}{h}\left[\varphi - \varphi(x_i - h)\right]$$

$$D_i^\circ \varphi = \frac{1}{h}\left[\varphi(x_i + \tfrac{h}{2}) - \varphi(x_i - \tfrac{h}{2})\right]$$

$D_i^\circ \varphi$ ei ehkä ole aivan luonnollinen, se on kahden Taylorin polynomin erotus:

$$\varphi(x_i + \tfrac{h}{2}) = \varphi(x_i) + \frac{h}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_i + \theta_1(h)), \quad \lim_{h\to 0} \theta_1(h) = 0$$

$$\varphi(x_i - \tfrac{h}{2}) = \varphi(x_i) - \frac{h}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_i + \theta_2(h)), \quad \lim_{h\to 0} \theta_2(h) = 0$$

Jos φ on neljä kertaa jatkuvasti derivoituva välillä $[x_i - h, x_i + h]$

$$D_i^\circ D_i^\circ \varphi = D_i^+ D_i^- \varphi = D_i^- D_i^- \varphi = \frac{1}{h^2}\left[\varphi(x_i + h) - 2\varphi + \varphi(x_i - h)\right]$$

Malliproblema (1D):

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + c\varphi = f, & 0 < x < 1, \quad c = c(x), \\ \varphi(0) = g(0), & \varphi(1) = g(1). \end{cases}$$

Vastaava differenssimenetelmä:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{h^2}\left[\Psi_{i+1} - 2\Psi_i + \Psi_{i-1}\right] + c(x_i)\Psi_i = f(x_i), & 1 \le i \le N, \\ \Psi_0 = g(0), \quad \Psi_{N+1} = g(1) \end{cases}$$

Matriisimuodossa: $A_h \Psi_h = b_h$,

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2+c(x_1)h^2 & -1 & & \cdots & 0 \\ -1 & 2+c(x_2)h^2 & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2+c(x_N)h^2 \end{bmatrix}$$

$$b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{1}{h^2}g(0) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{1}{h^2}g(1) \end{pmatrix}$$

Menetelmä on konsistentti kertalukua 2.

Määritelmä 4.1.1. Konsistenssivirhe

Olkoon $L\varphi = 0$ ODY ja $L_h\Psi_h = 0$ vastaava differenssimenetelmä. Konsistenssivirhe ε_h on $\varepsilon_h = L_h\varphi_h$, missä φ_h on tarkan ratkaisun φ projektio hilapisteille. Menetelmä on konsistentti, jos $\lim_{h\to 0} \varepsilon_h = 0$. Menetelmän kertaluku p määräytyy arviosta

$$\|\varepsilon_h\|_\infty \le Ch^p.$$

Häiriöalttiuden arvioinnista

Tarkastellaan Poissonin probleemaa: $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, h = vakio

Differenssimenetelmä:

$$(A_h \Psi_h)_{ij} = -\frac{1}{h^2}\left(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 4\psi_{ij}\right)$$

$$= f_{ij}, \quad \psi_{ij} \simeq \varphi(ih, jh), \quad i,j = 1, \dots, N-1,$$

$$Nh = 2\pi$$

Yrite: $$\psi(x,y) = \sum_{k,l=1,\dots,N-1} \mathrm{Re}\left(u_{kl}\, e^{i(kx+ly)}\right)$$

Sijoitetaan:

$$-\frac{1}{h^2}\left(u_{kl}\, e^{i(kih + ljh)}\left[\underbrace{\underbrace{e^{ikh} + e^{-ikh}}_{=2\cos kh} + \underbrace{e^{ilh} + e^{-ilh}}_{=2\cos lh}}_{=4 - 4\sin^2\frac{kh}{2} - 4\sin^2\frac{lh}{2}} - 4\right]\right) = f_{ij}$$

Korvataan $f(x,y)$ diskreetillä Fourier muunnoksella:

$$f(x,y) \simeq \sum_{k,l=1,\dots,N-1} \mathrm{Re}\left(\hat{f}_{kl}\, e^{i(kx+ly)}\right)$$

Saadaan kertoimille $$u_{kl} = \frac{\hat{f}_{kl} h^2}{4\sin^2\frac{kh}{2} + 4\sin^2\frac{lh}{2}}.$$

Reunaehdot: Lineaariyhdistelyt sini-funktioista, lisäksi vaaditaan $f(x,y) = -f(2\pi - x, y) = -f(x, 2\pi - y)$,

jolloin $$\psi(x,y) = \sum_{kl=0,\dots,N} u_{kl} \sin(kx)\sin(ly).$$

Havaitaan, että $v_{kl} = \sin kx \sin ly$ on ominaisvektori vastaten ominaisarvoa $\lambda_{kl} = \frac{1}{h^2}\left[4\sin^2\frac{kh}{2} + 4\sin^2\frac{lh}{2}\right]$, sillä

$$(A_h v_{kl})_{ij} = \frac{1}{h^2}\Big[\sin(k(i+1)h)\sin(ljh) + \sin(k(i-1)h)\sin(ljh)$$

$$+ \sin(kih)\sin(l(j+1)h) + \sin(kih)\sin(l(j-1)h)$$

$$- 4\sin(kih)\sin(ljh)\Big]$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a ; & k(i+1)h = kih + kh \\ \sin(a-b) = -\cos a \sin b + \cos b \sin a ; & k(i-1)h = kih - kh \end{cases}$$

Saadaan:

$$\frac{1}{h^2}\Big[2\cos(kh)\sin(kih)\sin(ljh) + 2\cos(lh)\sin(kih)\sin(ljh)$$

$$- 4\sin(kih)\sin(ljh)\Big]$$

$$= \frac{1}{h^2}\Big[\underbrace{\left(2\cos(kih) + 2\cos(ljh) - 4\right)}_{4\sin^2\frac{kh}{2} + 4\sin^2\frac{lh}{2}}\sin(kih)\sin(ljh)\Big]$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_{min} : & k = l = 1 \\ \lambda_{max} : & k = l = \frac{\pi}{h} - 1 \end{array}\right\} \quad K(A_h) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{h}{2}}{\sin^2\frac{h}{2}} = \frac{1 - \sin^2\frac{h}{2}}{\sin^2\frac{h}{2}}$$

$$\simeq \frac{4}{h^2} = O(h^{-2})$$

4.2 Suppenemistarkasteluja

Malliprobleema : Cauchyn probleema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t) = A(\varphi(t)), & 0 < t \leq T, \\ \varphi(t=0) = \varphi_0 . \end{cases}$$

Toki ratkaisu φ riippuu myös paikasta ; Korostetaan aikariippuvuutta.
A on jokin differentiaalioperaattori, lineaarinen, eikä riipu ajasta
Esimerkiksi d^2/dx^2 tai Δ ; Reunaehtojen on tietenkin toteuduttava

Oletetaan, että ratkaisu ajan hetkellä t on $\varphi(t)$.
$S(t)$ on operaattori : $S(t)\varphi_0 = \varphi(t)$.

Aika-askeleet

Väli $[0,T]$, $k = \Delta t = \dfrac{T}{M}$.

Approksimaatio $\Psi_n \sim \varphi(t_n)$, $t_n = n\Delta t$,

$$\begin{cases} \varphi(t_{n+1}) = S(k)\varphi(t_n) & \text{(yksi askel)} \\ \Psi_{n+1} = G(k)\Psi_n \end{cases}$$

$G(k)$ riippuu paikkadiskretoinnista. Alussa $\Psi_0 = \varphi(t=0) = \varphi_0$

4.2.1. Konsistenssi

Olkoon $L = \dfrac{\partial}{\partial t} - A$ ja jono $\Psi_k = (\Psi_n)_{n\geq 0}$. Diskreetin operaattorin L_k avulla määritellään jono $L_k\Psi_k$:

$$L_k\Psi_k = ((L_k\Psi_k)_n)_{n\geq 1}, \quad (L_k\Psi_k)_n = \frac{\Psi_n - G(k)\Psi_{n-1}}{k},$$

koska $\Psi_{n+1} = G(k)\Psi_n$ "$\Leftrightarrow$" $\dfrac{\Psi_n - \Psi_{n-1}}{k} - \dfrac{G(k)\Psi_{n-1} - \Psi_{n-1}}{k} = 0$.

Paikkariippuvuus on siis mukana $G(k)$:ssa.

Määritelmä 4.2.1.1. Konsistenssivirhe

$$\mathcal{E}_k = L_k \varphi_k \quad ; \quad \mathcal{E}_k = (\varepsilon_n)_{n \geq 1}$$

Menetelmä on konsistentti, jos kaikille n, $\varepsilon_n \to 0$, kun $k \to 0$ ja $h \to 0$.

Jos kaikille n,

$$\| \varepsilon_n \| \leq \Theta(k^p) + \Theta(h^q),$$

on menetelmän kertaluku ajan suhteen p ja paikan suhteen q.

Huomaa, että $\varepsilon_n = \dfrac{S(k) - G(k)}{k} \varphi(t_{n-1})$.

Voimme siis arvioida virhettä, joka syntyy, kun jatkuvaa operaattoria approksimoidaan diskreetillä.

4.2.2. Stabiilisuus

Induktiolla: $\Psi_n = G(k)^n \Psi_0$

Vaatimus: Ei kasvua ajassa eli eri virheet eivät saa kumuloitua.

Määritelmä 4.2.2.1 Stabiilisuus

Differenssimenetelmä on stabiili, jos $G(k)^n$ pysyy tasaisesti rajoitettuna kaikille $k = \Delta t$, n, joille pätee:

$$0 \leq k \leq k^*, \quad 0 \leq nk \leq T.$$

Toisin sanoen, on olemassa positiivinen vakio $C(t)$ (joka ei riipu h:sta) s.e.

$$\forall n, \ \forall k \in (0, k^*], \ 0 \leq nk \leq T, \text{ pätee } \| G(k)^n \| \leq C(t).$$

4.3. Suppeneminen

Lause 4.3.1 Stabiili ja konsistentti menetelmä suppenee.

Todistus

Olkoon $E_k = \{e_0, e_1, \dots\}$; $e_n = \varphi(t_n) - \Psi_n$.

Nyt: $L_k E_k = L_k \varphi_k = \mathcal{E}_k$ $\quad (L_k \Psi_k = 0)$

Määritelmän mukaan:

$$(L_k E_k)_n = \frac{e_n - G(k) e_{n-1}}{k} = \varepsilon_n$$

Ratkaistaan $e_n = G(k) e_{n-1} + k \varepsilon_n$, mistä rekursiolla

$$e_n = [G(k)]^n e_0 + k \sum_{i=1}^{n} [G(k)]^{n-i} \varepsilon_i \quad ; \; e_0 = 0 \quad (\,!\,)$$

joten

$$\| e_n \| \leq n k C \max_i \| \varepsilon_i \| \qquad (\text{stabiilisuus})$$

eli

$$\| e_n \| \leq T C \max_i \| \varepsilon_i \| \quad .$$

Koska menetelmä on konsistentti, virhe menee kohti nollaa, kun $k \to 0$ ja $h \to 0$.

$\square$

4.4. Klassisia menetelmiä

Malliprobleema: Lämpöyhtälö

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T, \\ \varphi(x,0) = \varphi^0(x) \end{cases}$$

4.4.1 Eulerin menetelmä

Idea: Korvataan jatkuva $L = \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ operaattorilla, $\bar{L}$, joka on diskretoitu ajassa ja paikassa: $\bar{\Psi} = (\Psi_i^n)_{i \in \mathbb{Z}, n \in \{0,\dots,M\}}$

Saadaan: $\bar{L}\bar{\Psi} = ((\bar{L}\bar{\Psi})_i^n)_{i \in \mathbb{Z}, n \in \{0,\dots,M\}}$

$\forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \{0,\dots,M-1\}$:

$$(\bar{L}\bar{\Psi})_i^{n+1} = \frac{\Psi_i^{n+1} - \Psi_i^n}{k} - \frac{\Psi_{i+1}^n - 2\Psi_i^n + \Psi_{i-1}^n}{h^2}$$

Differenssimenetelmä:

$$\begin{cases} \bar{L}\bar{\Psi} = 0 \\ \bar{\Psi}_i^0 = \varphi^0(x_i) \end{cases} ; \quad \Psi_i^{n+1} = \Psi_i^n + \frac{k}{h^2}(\Psi_{i+1}^n - 2\Psi_i^n + \Psi_{i-1}^n)$$

Konsistenssivirhe: $\bar{\varepsilon} = \bar{L}\bar{\varphi} = \bar{L}\bar{\varphi} - L\varphi \quad ; \quad \bar{\varepsilon} = (\varepsilon_i^n)_{i \in \mathbb{Z}, n \in \{1,\dots,M\}}$

$$\varepsilon_i^{n+1} = \left[\frac{\varphi(x_i, t^{n+1}) - \varphi(x_i, t^n)}{k} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_i, t^n) \right]$$
$$- \left[\frac{\varphi(x_{i+1}, t^n) - 2\varphi(x_i, t^n) + \varphi(x_{i-1}, t^n)}{h^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_i, t^n) \right]$$

Taylor: $\varepsilon_i^{n+1} = \dfrac{k}{2} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x_i, \tau^n) - \dfrac{h^2}{12} \dfrac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}(\xi_i, t^n)$, $\quad \tau \in (t^n, t^{n+1})$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

Riittävän sileille:

$$|\varepsilon_i^{n+1}| \leq C_1 k + C_2 h^2$$

Konsistentti kertalukua 1 ajassa ja 2 paikassa.

Stabiilisuus

Olkoon $\lambda = \frac{k}{h^2} \geq 0$; DM : $\psi_i^{n+1} = \lambda \psi_{i+1}^n + (1-2\lambda)\psi_i^n + \lambda \psi_{i-1}^n$

Jos $0 \leq \lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, kaikkien oikean puolen kertoimien summa on 1 (ja ne ovat positiivisia), eli $|\psi_i^{n+1}| \leq \|\Psi^n\|_\infty$ ja induktiolla:

$$\|\Psi^n\|_\infty \leq \|\Psi^0\|_\infty , \quad \text{jos } 0 \leq \lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2} .$$

Stabiilisuus : Von Neumann

Tarkastellaan DM:ää paikan suhteen "jatkuvana":

$$\frac{\psi^{n+1}(x) - \psi^n(x)}{k} - \frac{\psi^n(x+h) - 2\psi^n(x) + \psi^n(x-h)}{h^2} = 0$$

Fourier-muunnetaan : $\hat{\psi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \psi(x)\,dx$

Käyttäen: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \varphi(x+h)\,dx = e^{i\xi h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} \varphi(y)\,dy$

Saadaan
$$\hat{\psi}^{n+1}(\xi) = \hat{\psi}^n(\xi) + \frac{k}{h^2}\left(e^{ih\xi}\hat{\psi}^n(\xi) - 2\hat{\psi}^n(\xi) + e^{-ih\xi}\hat{\psi}^n(\xi)\right)$$

eli $\hat{\psi}^{n+1}(\xi) = a(\xi)\hat{\psi}^n(\xi)$,

virheenvahvistuskerroin
$$a(\xi) = 1 + \frac{k}{h^2}\left(e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}\right) = 1 - 4\frac{k}{h^2}\sin^2\frac{h\xi}{2}$$

Induktiolla : $\hat{\psi}^n(\xi) = [a(\xi)]^n \hat{\psi}^0(\xi) = [a(\xi)]^n \hat{\varphi}^0(\xi)$,

joten stabiilisuus : $\|a\|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a(\xi)| \leq 1$.

Saadaan siis sama tulos!

4.4.2 Implisiittinen Euler

DM: $$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n + \frac{k}{h^2}\left(\psi_{i+1}^{n+1} - 2\psi_i^{n+1} + \psi_{i-1}^{n+1}\right)$$

Virheenvahvistuskerroin: $$b(\xi) = \frac{1}{1 + 4\frac{k}{h^2}\sin^2\frac{h\xi}{2}}$$

Implisiittinen on stabiili aina (ehdoitta).

Kertaluvut samat kuin Eulerin menetelmässä.

4.4.3 Crank-Nicolson

Olkoon $\theta \in [0,1]$. DM: $$\frac{\psi_i^{n+1} - \psi_i^n}{k} - D_i^+ D_i^- \left(\theta\psi^{n+1} + (1-\theta)\psi^n\right) = 0$$

Jos $\theta = 0$, saadaan Euler,
$\theta = 1$, saadaan Implisiittinen Euler.

Virheenvahvistuskerroin: $$c(\xi) = \frac{1 - 4(1-\theta)\frac{k}{h^2}\sin^2\frac{hk}{2}}{1 + 4\theta\frac{k}{h^2}\sin^2\frac{hk}{2}}$$

Stabiili, kun $\theta \geq \frac{1}{2}$.

Valitsemalla $\theta = \frac{1}{2}$ saadaan Crank-Nicolson.

Menetelmä on kertalukua 2 ajassa ja paikassa.

Huom! Tässä $f = 0$; Yleisesti: Oikea puoli $= \dfrac{f(t^{n+1}) + f(t^n)}{2}$

4.5 FEM ja paraboliset tehtävät

Malliprobleema:

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta u = f & \Omega \times I : \\ u = 0 & \Gamma \times I : \\ u(\cdot, 0) = u^0 & \end{cases} \qquad ; \qquad I = (0, T)$$

Variaatiomuoto:

$$\begin{cases} (\dot{u}(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) & \forall v \in V,\ t \in I \\ u(0) = u^0 & \end{cases}$$

Muodostetaan semi-diskreetti tehtävä: Etsi $u_h(t) \in V_h$, $t \in I$, s.e.

$$\begin{cases} (\dot{u}_h(t), v) + a(u_h(t), v) = (f(t), v) & \forall v \in V_h,\ t \in I \\ (u_h(0), v) = (u^0, v) & \forall v \in V_h \end{cases}$$

Sijoitetaan $u_h(t, x) = \sum_{i=1}^{M} \xi_i(t) \varphi_i(x)$, $\xi_i(t) \in \mathbb{R}$,

valitaan $v = \varphi_j$, $j = 1, \dots, M$, ja saadaan

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{M} \dot{\xi}_i(t) (\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^{M} \xi_i(t)\, a(\varphi_i, \varphi_j) = (f(t), \varphi_j), \\ \sum_{i=1}^{M} \xi_i(0) (\varphi_i, \varphi_j) = (u^0, \varphi_j), \qquad j = 1, \dots, M. \end{cases}$$

Tutummin matriisimuodossa:

$$\begin{cases} B \dot{\xi}(t) + A \xi(t) = F(t), & t \in I, \\ B \xi(0) = U^0 \end{cases}$$

A : jäykkyysmatriisi

B : massamatriisi

Standardimuunnos:

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) + \tilde{A} \eta(t) = g(t), & t \in I \\ \eta(0) = \eta^0 \end{cases} \implies \eta(t) = e^{-\tilde{A}t} \eta^0 + \int_0^t e^{-\tilde{A}(t-s)} g(s)\, ds, \quad t \in I.$$

Tämä ei ehkä ole niin kallista kuin mitä ennen on ajateltu!

Implisiittinen Euler

Korvataan semi-diskreetissä formulaatiossa aikaderivaatta differenssiapproksimaatiolla:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u_h^n - u_h^{n-1}}{k_n}, v \right) + a(u_h^n, v) = (f(t_n), v) \\ (u_h^0, v) = (u^0, v) \end{cases}$$

Asetetaan $u_h^n = \sum_{i=1}^{M} \xi_i^n \varphi_i$, mistä

$$(B + k_n A)\xi^n = B\xi^{n-1} + k_n F(t_n)$$

Joka askeleella on siis käännettävä $B + k_n A$, jos k_n on vakio, kustannus on mitätön, sillä stabiilisuusominaisuudet ovat samat kuin edellä.

Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u_h^n - u_h^{n-1}}{k_n}, v \right) + a\left(\dfrac{u_h^n + u_h^{n-1}}{2}, v \right) = \left(\dfrac{f(t_n) + f(t_{n-1})}{2}, v \right) \\ (u_h^0, v) = (u^0, v) \end{cases}$$

eli

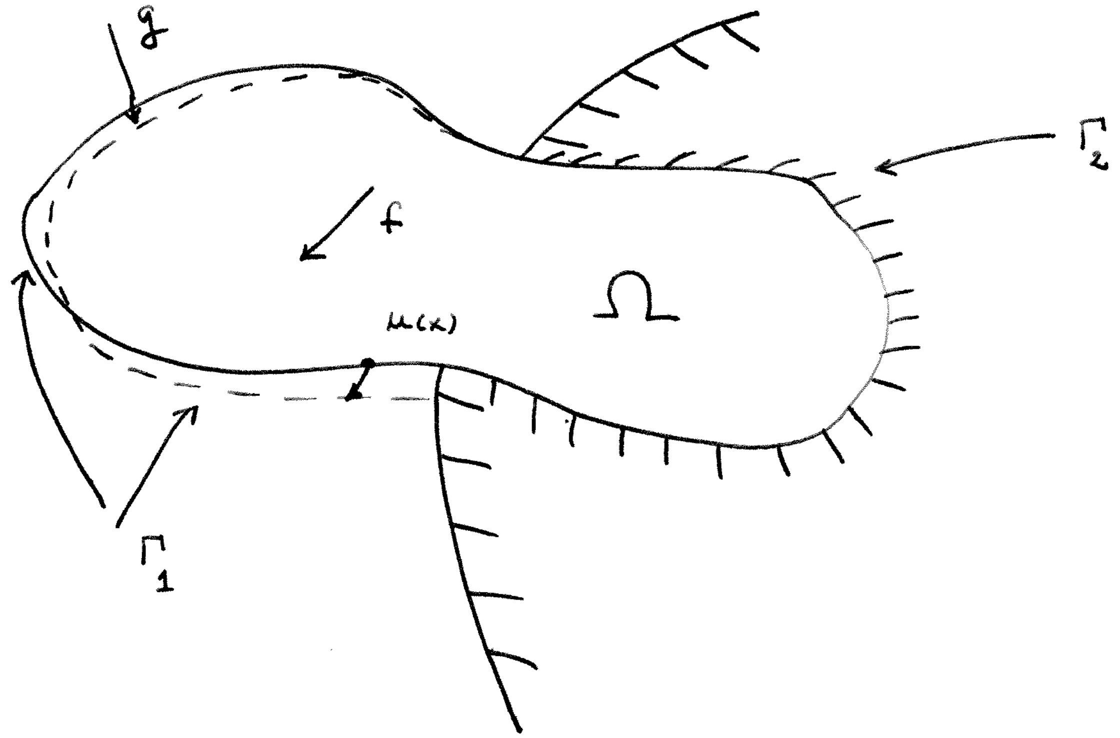
$$\left(B + \frac{k_n}{2} A\right)\xi^n = \left(B - \frac{k_n}{2} A\right)\xi^{n-1} + k_n \cdot \frac{1}{2}\left(F(t_n) + F(t_{n-1})\right)$$

Ongelma: Kankeissa tehtävissä aika-askeleen säädön ja lineaarialgebran kustannusten tasapainottaminen.

5 Sovelluksia

5.1. Elastisuus

Olkoon B elastinen kappale : $\Omega \subset \mathbb{R}^3$



$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$; $\text{area}(\Gamma_2) > 0$

Tilavuuskuorma : $f = (f_1, f_2, f_3)$

Pintakuorma : $g = (g_1, g_2, g_3)$

Ratkaistaan siirtymäkenttä $u = (u_1, u_2, u_3)$ ja symmetrinen jännitystensori $\sigma = (\sigma_{ij})$, $i,j = 1,2,3$.

σ_{ii} = normaalijännitys

σ_{ij} , $i \neq j$, = leikkausjännitys

Lisäksi venymätensori $\varepsilon(u) = \varepsilon_{ij}(u)$, $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Hooken laki : $\sigma_{ij} = \lambda \nabla \cdot u \, \delta_{ij} + \mu \varepsilon_{ij}(u)$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Tasapainoehdot:

$$-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i \;, \quad i = 1,2,3, \quad \Omega\text{:ssa}$$

Reunaehdot:

$$u = 0 \;, \quad \Gamma_2\text{:lla}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = g_i \;, \; i = 1,2,3, \quad \Gamma_1\text{:llä}$$

Lamén parametrit: $\mu = \dfrac{E}{1+\nu} \;, \quad \lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \;,$

missä E on kimmomoduli ja ν Poissonin luku.

(E on siis Youngin kimmomoduli.)

Johdetaan variaatiomuoto: (merkintä: $v_{,j} = \dfrac{\partial v}{\partial x_j}$, $j = 1,2,3$

Greenin kaava: $\displaystyle\int_\Omega \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx = \int_\Gamma \sigma_{ij} n_j v_i\, ds - \int_\Omega \sigma_{ij,j}\, v_i\, dx$

Näin on, koska $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$: Summeraus yli $i,j = 1,2,3$:

$$\sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} v_{i,j} + \sigma_{ji} v_{j,i}\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} v_{i,j} + \sigma_{ij} v_{i,j}\right)$$

$$= \sigma_{ij} v_{i,j}$$

Tasapaino- ja reunaehdot: Testifunktio $v = (v_1, v_2, v_3)$

$$\int_\Omega f_i v_i\, dx = -\int_\Omega \sigma_{ij,j} v_i = \int_\Omega \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx - \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij} n_j v_i\, ds$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx = \int_\Omega f_i v_i\, dx + \int_{\Gamma_1} g_i v_i\, ds$$

Eliminoidaan σ_{ij} ja huomataan, että $\nabla\cdot u\, \delta_{ij}\, \varepsilon_{ij}(v) = \nabla\cdot u\, \nabla\cdot v$

$$\int_\Omega \left[\lambda(\nabla\cdot u)(\nabla\cdot v) + \mu\, \varepsilon_{ij}(u)\, \varepsilon_{ij}(v) \right] dx = \int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1} g_i v_i \, ds$$

mikä on haluttu variaatiomuoto $a(u,v) = L(v)$.

Huomaa, että summeerauskonvention ansiosta $\varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)$ esittää yhdeksän termin summaa: $\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)$

$$= \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Big)\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\Big)$$

$$+ \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\Big)\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\Big)$$

$$+ \dots \Big)$$

Yhteen solmuun liittyy siis kolme vapausastetta, siirtymät suuntina x_i, $i = 1,2,3$.
Siirtymät kytkeytyvät variaatiomuodossa s.e. eri komponenttien vuorovaikutukset lasketaan erikseen:

$u_1 \leftrightarrow u_3$: Elementissä muodoille φ_i, φ_j: variaatiomuotoon sijoitetaan
$u = (\varphi_i, 0, 0)$
$v = (0, 0, \varphi_j)$

Kahden muodon vuorovaikutus variaatiomuodossa $a(u,v)$ on siis 3×3-matriisi (tässä tapauksessa).
Kuorma lasketaan muodolle komponenteittain: 3×1.

Käytännössä vaihtoehtoja on useita :

(i) kirjoitetaan $a(u,v)$ auki ja lasketaan kaikilla φ_i, φ_j : $u = (\varphi_i, 0, 0)$, $v = (\varphi_j, 0, 0)$

$v = (0, \varphi_j, 0)$

$v = (0, 0, \varphi_j)$

(ii) lasketaan $\varepsilon_{ij}(\cdot)$:t erikseen ja lasketaan $\varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)$ joka kerran uudestaan

(iii) kirjoitetaan $a(u,v)$ auki ja erotetaan kaikki yhdeksän tapausta : $[u_1, v_1]$, $[u_1, v_2]$, ...

Tapa (i) on naivi, mutta helposti generoitavissa esim. symbolisilla ohjelmistoilla. Tapa (ii) on mukava kompromissi. Suurin teho saadaan kohdassa (iii), mutta alkuperäisen tehtävän rakenne katoaa ja ylläpitokustannukset tehtävää muutettaessa ovat suuret.