2 ELEMENTTIEN TOTEUTUKSESTA

2.1. Referenssielementti

Tarkastellaan kolmiota $\hat{K}$, jonka kärjet ovat $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ - tasossa. Olkoot $\hat{\lambda}_i$:t normaalit lineaariset kanta-funktiot $(\in P_1(\hat{K}))$. Kuten edellä $\hat{v}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{3} \hat{\eta}_i \hat{\lambda}_i(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{K}$

Malliprobleema: Poisson

a) Samanmuotoinen kolmio

$K : (0,0), (h,0), (0,h)$

Olkoon kuvaus: $F : \hat{K} \to K$, $x = F(\hat{x}) = (h\hat{x}_1, h\hat{x}_2)$, $\hat{x} \in \hat{K}$

Annetulle $v \in P_1(K)$:

$$\hat{v}(\hat{x}) \doteq v(x) = v(F(\hat{x})), \quad \hat{x} \in \hat{K}.$$

(Ja siis $\hat{v} \in P_1(\hat{K})$.)

Lasketaan $\int_K |\nabla v|^2 dx$:

Ketjusääntö :
$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_i}$$
$$= \frac{\partial v}{\partial x_i} h, \quad i = 1,2$$

Saadaan siis: $\nabla \hat{v} = h \nabla v$, $dx = h^2 d\hat{x}$, mistä

$$\int_K |\nabla v|^2 dx = \int_K \frac{1}{h^2} |\nabla \hat{v}|^2 dx = \int_{\hat{K}} |\nabla \hat{v}|^2 d\hat{x}$$

Samanmuotoisilla elementeillä jäykkyysmatriisi on sama.

b) Yleinen tapaus

Olkoot K:n kärjet a^i, $i = 1,2,3$.

Kuvaus (affiini) : $x = F(\hat{x}) = a^1 + (a^2 - a^1)\hat{x}_1 + (a^3 - a^1)\hat{x}_2$

Kantafunktiot (lokaalit) : $\varphi_j(x) = \hat{\varphi}_j(F^{-1}(x))$, $j = 1,2,3$

Lasketaan : $\alpha_{ij}^K = \int_K \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx$, $i = 1,2,3$

Ketjusääntö :

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\hat{\varphi}_i(F^{-1}(x))\right)$$

$$= \frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial\hat{x}_1}\frac{\partial\hat{x}_1}{\partial x_j} + \frac{\partial\hat{\varphi}_i}{\partial\hat{x}_2}\frac{\partial\hat{x}_2}{\partial x_j} \quad , \quad \text{mistä}$$

$\nabla\varphi_i = J^{-T}\nabla\hat{\varphi}_i$, missä J^{-T} on kuvauksen F^{-1}:n Jakobin matriisin transpoosi:

$$J^{-T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\hat{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\hat{x}_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\hat{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\hat{x}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} .$$

Vihdoin : $\alpha_{ij}^K = \int_{\hat{K}} (J^{-T}\nabla\hat{\varphi}_i)\cdot(J^{-T}\nabla\hat{\varphi}_j)\,|\det J|\,d\hat{x}$.

Kuvauksen F termein: $J^{-T} = (J^{-1})^T = \frac{1}{\det J} J_0$,

missä $J_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial\hat{x}_2} & -\frac{\partial F_2}{\partial\hat{x}_1} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial\hat{x}_2} & \frac{\partial F_1}{\partial\hat{x}_1} \end{pmatrix}$, mistä vielä uusi muoto

$$\alpha_{ij}^K = \int_{\hat{K}} (J_0\nabla\hat{\varphi}_i)\cdot(J_0\nabla\hat{\varphi}_j)\,\frac{d\hat{x}}{|\det J|}$$

Merkitään nyt : $K = J^{-T}$, $K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$

$$\nabla \hat{\varphi}_i = \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_1} , \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_2} \right)$$

$$(K \nabla \hat{\varphi}_i) \cdot (K \nabla \hat{\varphi}_j) = (K \nabla \hat{\varphi}_i)^T (K \nabla \hat{\varphi}_j)$$

$$= \nabla \hat{\varphi}_i^T (K^T K) \nabla \hat{\varphi}_j$$

$$= \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}_1} \left[K_{11}^2 + K_{21}^2 \right]$$

$$+ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}_2} \left[K_{11} K_{12} + K_{21} K_{22} \right]$$

$$+ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}_1} \left[K_{11} K_{12} + K_{21} K_{22} \right]$$

$$+ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}_2} \left[K_{12}^2 + K_{22}^2 \right]$$

Malliprobleemassa siis :

$$\left(\alpha_{ij}^{K} \right) = \sum_{n,m=1}^{2} (K^T K)_{nm} \, I_{nm}^{ij} \, |\det J| ; \quad I_{nm}^{ij} = \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}_n} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}_m} \, d\hat{x}$$

Integraalit I_{nm} voi laskea etukäteen. Jokaisen kolmion kohdalla integrointi onkin vain sopivien lineaariyhdistelyiden laskemista.

Viedään ajatusta pidemmälle. Määritellään alkioittainen tulo:

$a \odot b$, missä b on $m \times n$-matriisi, ja a on

(i) skalaari, ab

(ii) $\underset{m \times 1}{a}$, b:n rivien skaalaus

$\underset{1 \times n}{a}$, b:n sarakkeiden skaalaus

(iii) $\underset{m \times n}{a}$, $a .* b$, alkioittainen tulo

Aukaisemalla integroidut matriisit I_{nm}^{ij} saadaan 4×9-matriisi

$$\begin{pmatrix} I_{11}^{11} & I_{11}^{12} & \cdots & I_{11}^{33} \\ I_{12}^{11} & & \ddots & \\ I_{21}^{11} & & & \\ I_{22}^{11} & & & I_{22}^{33} \end{pmatrix} = \tilde{I}$$

Aukaistaan kuvausmatriisi:

$$\left[(K^T K)_{11} \quad (K^T K)_{12} \quad (K^T K)_{21} \quad (K^T K)_{22} \right] = \tilde{K}$$

Yhdelle elementille K: $\left(\widetilde{\alpha_{ij}^{K}} \right) = \left(|\det J_F| \odot \tilde{K} \right) \tilde{I}$

Kaikki elementit: $\approx$ tarkoittaa yli kaikkien elementtien

$$\approx{A} = \left(\approx{D} \odot \approx{K} \right) \approx{I}$$

$\hookrightarrow$ $|\det J_F|$ jokaiselle elementille.

2.2. Numeerinen integrointi eli kvadratuureista

Tarkastellaan seuraavaksi diffuusio-probleemaa:

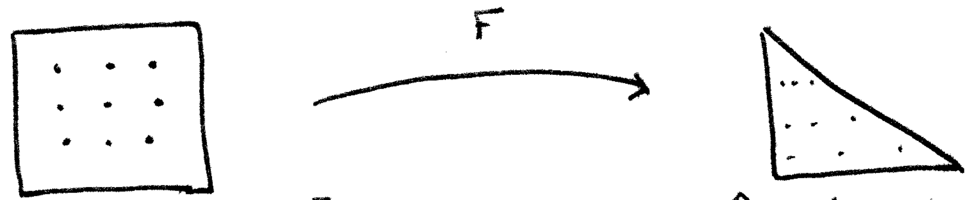
$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu(x) \nabla u) = f & \Omega\text{:ssa} \\ u = u_0 & \Gamma\text{:lla} \end{cases}$$

Variaatiomuodon bilineaarimuoto $a(u,v) = \int_\Omega \nu(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx$

Diffuusiotermi $\nu(x)$ ei muutu elementtimenetelmässä. Jäykkyysmatriisia ei siis voi laskea valmiiksi, vaan jokainen elementtijäykkyysmatriisi on integroitava erikseen.

Kvadratuurit kolmioille

Helpoin tapa muodostaa mielivaltaisen korkeita Gaussin kvadratuureja kolmioille on kuvata nelikulmion kvadratuuri ja skaalata painot kuvauksen Jakobin matriisin determinantilla.



$\hat{Q} = [-1,1] \times [-1,1]$ $\qquad$ $\hat{K}$ (valitse suosikki)

$\sum w_{ij}^Q = 4$ $\qquad$ $\sum w_{ij}^K = 4\,|\det J_F|$

Edellä esitetyllä matriisitekniikalla voi jäykkyysmatriisin (lokaalin) integroinnin formuloida seuraavasti:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_{11}, y_{11}) & \varphi_2(x_{11}, y_{11}) & \dots & \varphi_1(x_{nn}, y_{nn}) \\ \vdots & & \ddots & \\ \varphi_M(x_{11}, y_{11}) & \dots & & \varphi_M(x_{nn}, y_{nn}) \end{pmatrix}$$

Ja valitsemalla $\tilde{N} = \nu(x)$ evaluoituna kvadratuuripisteissä
W = painot
$\hookrightarrow$ tarkemmin: pisteiden kuvina $(F_x(\xi,\eta), F_y(\xi,\eta))$

$$\tilde{A} = (\tilde{N} \odot W \odot \varphi)\varphi^T$$

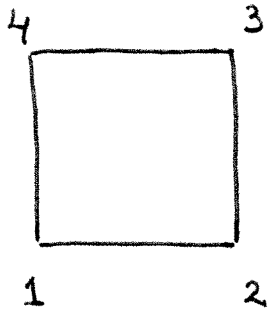
2.3. Kanoninen elementtiperhe tasossa

Nelikulmio

$$\hat{Q} = [-1,1] \times [-1,1]$$

Lineaariset muodot (solmumuodot):

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$



Kuvaus $F : \hat{Q} \to Q$:
$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{4} x_i N_i(\xi,\eta) \\ y = \sum_{i=1}^{4} y_i N_i(\xi,\eta) \end{cases}$$

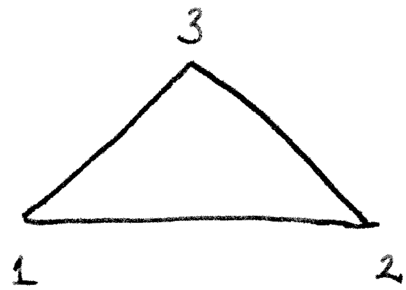
$Q = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)\}$

Kolmio

$$\hat{T} = \{(-1,0),(1,0),(0,\sqrt{3})\}$$

Lineaariset muodot (solmumuodot):

$$L_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}}\right)$$
$$L_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}}\right)$$
$$L_3 = \frac{\eta}{\sqrt{3}}$$



Kuvaus $F : \hat{T} \to T$:
$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{3} x_i L_i(\xi,\eta) \\ y = \sum_{i=1}^{3} y_i L_i(\xi,\eta) \end{cases}$$

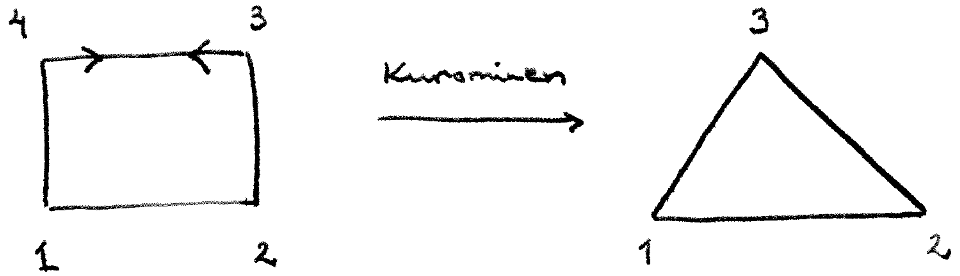
$T = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\}$

Kvadratuuri kanonisena kolmiona

Idea: $$\int_{\hat{Q}} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int_{\hat{T}} f\big(F_x(\xi,\eta), F_y(\xi,\eta)\big)\,|\overset{\det}{J_F}|\,dx\,dy$$

Kuvauksen F yleinen muoto tasossa:

$$F(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1\xi + c_1\eta + d_1\xi\eta \\ a_2 + b_2\xi + c_2\eta + d_2\xi\eta \end{pmatrix}$$



$$F:\ \hat{Q}_1 \to \hat{T}_1\ ,\ \hat{Q}_2 \to \hat{T}_2\ ,\ \hat{Q}_3 \to \hat{T}_3\ ,\ \hat{Q}_4 \to \hat{T}_3$$

Kahdeksan tuntematonta, kahdeksan yhtälöä: Saadaan

$$F(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\xi\eta \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta \end{pmatrix}$$

$$J_F(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\eta & -\frac{1}{2}\xi \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$|J_F(\xi,\eta)| = \det J_F(\xi,\eta) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-\eta)$$

2.4. Kanoninen elementtiperhe 3D:ssä

<u>Kuutio</u>

$$\hat{Q} = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$$

Lineaariset muodot:

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$\dots$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$F: \quad x = \sum_{i=1}^{8} x_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad ; \quad \text{vastaavasti } y, z$$

<u>Tetraedri</u>

$$\hat{T} = \left\{ (-1,0,0), (1,0,0), (0,\sqrt{3},0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}\right) \right\}$$

Lineaariset muodot:

$$L_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \xi - \frac{1}{\sqrt{3}}\eta - \frac{1}{\sqrt{6}}\zeta\right)$$

$$L_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \xi - \frac{1}{\sqrt{3}}\eta - \frac{1}{\sqrt{6}}\zeta\right)$$

$$L_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{8}}\zeta\right)$$

$$L_4 = \sqrt{\frac{3}{8}}\,\zeta$$

Barysentriset: $\sum_{i=1}^{4} L_i = 1$

$$F: \hat{Q} \longrightarrow \hat{T} \quad ; \quad |J_F(\xi,\eta,\zeta)| = \det(J_F(\xi,\eta,\zeta))$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{8}}(1 - \eta - \zeta + \eta\zeta)(\zeta - 1)$$

Huomaa, että kvadratuurin kaavoissa esiintyy Jacobin matriisin determinantissa ζ^2 eli yhden muuttujan kvadraattinen termi. Gaussin kvadratuuri ei voi olla samaa astetta kaikissa suunnissa.