1.3. FEM Poissonin yhtälölle

Poisson:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{:ssa} \\ u = 0 & \Gamma\text{:lla} \end{cases} \qquad (D)$$

Ω avoin, rajoitettu alue $\mathbb{R}^2$:ssa, jonka reuna on Γ.
f kuten edelläkin; $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Kerrataan hieman koneistoa:

Divergenssilause (2D): $\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div} A \, dx = \int_\Gamma A \cdot n \, ds$,

missä $A = (A_1, A_2)$ on vektoriarvoinen funktio Ω:ssa

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2},$$

$n = (n_1, n_2)$ yksikköulkonormaali Γ:lla.

Olkoon A vuoroin $(vw, 0)$ ja $(0, vw)$; saadaan

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} w \, dx + \int_\Omega v \frac{\partial w}{\partial x_i} dx = \int_\Gamma v w n_i \, ds, \quad i = 1, 2. \quad (*)$$

Merkitään v:n gradienttia ∇v, $\nabla v = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \dfrac{\partial v}{\partial x_2} \right)$.
Käyttäen identiteettiä $(*)$ saamme Greenin kaavan:

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx \equiv \int_\Omega \left[\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] dx$$

$$= \int_\Gamma \left[v \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + v \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 \right] ds - \int_\Omega v \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] dx$$

$$= \int_\Gamma v \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_\Omega v \Delta w \, dx, \quad \text{missä } \frac{\partial w}{\partial n} = \nabla w \cdot n$$

(normaaliderivaatta)

Variaatioprobleema: (V)

Etsi $u \in V$ s.e. $a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V$,

missä
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx$$
$$(f,v) = \int_\Omega f v \, dx$$

$$V = \left\{ v \mid v \text{ on jatkuva } \Omega\text{:ssa}, \ \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \text{ ovat paloittain jatkuvia } \Omega\text{:ssa}, \ v = 0 \ \Gamma\text{:lla}$$

Menetellään aivan kuten 1D-tapauksessakin:
Kerrotaan differentiaaliyhtälö testifunktiolla ja integroidaan

$$(f,v) = -\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = \underbrace{-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds}_{=0, \text{ koska } v=0 \text{ reunalla}} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = a(u,v)$$

Jälleen: (D) $\Leftrightarrow$ (M) $\Leftrightarrow$ (V)

(M): Etsi $u \in V$ s.e. $F(u) \leq F(v)$, $\forall v \in V$,
missä $F(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - (f,v)$ (potentiaalienergia)

Muodostetaan seuraavaksi $V_h \subset V$. Oletetaan seuraavassa, että Ω:n reuna ei ole kaareva ts. Ω on monikulmio.
Diskretoidaan Ω muodostamalla kolmiointi $T_h = \{K_1, \dots, K_m\}$ s.e.

$$\Omega = \bigcup_{K \in T_h} K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m,$$

Kolmiot eivät leikkaa toisiaan kuin reunoillaan ja yhdenkään kolmion kärki ei ole toisen sivulla.

Verkkoparametri $h = \max_{K \in T_h} \operatorname{diam}(K)$, $\operatorname{diam} K$ = K:n halkaisija
= K:n pisin sivu

Vihdoin:

$$V_h = \{ v \mid v \text{ on jatkuva } \Omega\text{:ssa}, \ v_{|K} \text{ lineaarinen, kun } K \in T_h, \ v = 0 \ \Gamma\text{:lla} \}$$

$v_{|K}$ on funktion v rajoittuma kolmiolle K.

Valitaan (taas) parametreiksi pistearvot; luonnollinen valinta on arvot $v(N_i)$, missä N_i, $i = 1, \dots, M$ ovat kolmioinnin T_h solmut. Jälleen Γ:lla olevat solmut voi jättää huomiotta.

M kpl kantafunktioita: $\varphi_j(N_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$i, j = 1, \dots, M$

Kantafunktion φ_j kantaja, $\operatorname{supp} \varphi_j$, muodostuu niistä kolmioista, joihin solmu N_j kuuluu.

Funktioille $v \in V_h$: $v(x) = \sum_{j=1}^{M} \eta_j \varphi_j(x)$, $\eta_j = v(N_j)$,

$x \in \Omega \cup \Gamma$.

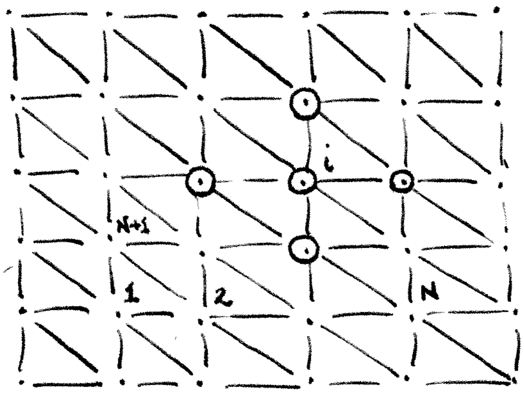
<u>Elementtimenetelmä</u>:

Etsi $u_h \in V_h$ s.e. $a(u_h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h$.

Jälleen päädytään yhtälöryhmään: $A\xi = b$.

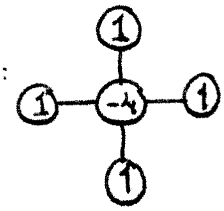
A symmetrinen ja positiividefiniitti.

Esimerkki



$\Big\}\ h = \dfrac{1}{N+1}$

5:n pisteen sääntö :



$Ax = b$; $A =$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & N+1 & & & \\ 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & & 0 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & -1 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 4 & 0 & & & -1 \\ 0 & & & & 0 & 4 & -1 & & \\ -1 & 0 & & & & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & & & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & 4 & -1 \\ 0 & & & -1 & & & 0 & -1 & 4 \end{array}$$

Huomaa, että nauhat katkeavat aina, kun rivi vaihtuu :

$\alpha_{N,N+1} = 0$

Elementtiverkko indusoi matriisin rakenteen. Tässä kytkentöjä pitäisi olla kuusi eikä neljä kytkentägraafin mukaan; "puuttuvat" alkiot ovat identtisesti nollia.

Matriisin kokoaminen on harjoitustehtävä.

1.4. Neumannin probleema

Vaihdetaan malliprobleemaa ja samalla reunaehtoa:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \Omega\text{:ssa} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \Gamma\text{:lla} \end{cases} \qquad (D)$$

Reunaehto: $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ on ns. Neumannin ehto, kun taas

$u = u_0$ on ns. Dirichlet'n ehto.

Mekaanikassa Neumannin ehto kuvaa vuota tai voimaa Γ:lla.

Variaatiomuoto (V): Etsi $u \in V$ s.e.

$$a(u,v) = (f,v) + \langle g,v\rangle \quad \forall v \in V$$

missä

$$a(u,v) = \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + uv]\, dx$$

$$(f,v) = \int_\Omega fv\, dx$$

$$\langle g,v\rangle = \int_\Gamma gv\, ds$$

Minimointitehtävä (M): Etsi $u \in V$ s.e. $F(u) \leq F(v)\ \forall v \in V$,

missä $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - (f,v) - \langle g,v\rangle$.

Tavalliseen tapaan (D) $\Rightarrow$ (V):

$$(f,v) = \int_\Omega (-\Delta u + u)v\, dx = -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\, ds + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega uv\, dx$$

$$= -\langle g,v\rangle + \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + uv]\, dx = a(u,v) - \langle g,v\rangle$$

Huomaa, että avaruutta V ei ole määritelty.
Oikea valinta on $V = H^1(\Omega)$, missä $H^1(\cdot)$ on Hilbertin avaruu
Palaamme asiaan virhearvioiden yhteydessä.

Luonnolliset ja oleelliset reunaehdot

Malliprobleeman reunaehto ei esiinny variaatiomuodossa. Se sisältyy implisiittisesti; variointin voi ajatella tapahtuvaksi erikseen Ω:n "sisällä" ja lopuksi Γ:lla. Neumannin ehtoa kutsutaankin luonnolliseksi reunaehdoksi, kun taas Dirichlet'n ehtoa kutsutaan oleelliseksi reunaehdok

Elementtimenetelmä malliprobleemalle:

$$V_h = \{ v \mid v \text{ on jatkuva } \Omega\text{:ssa}, \ v|_K \text{ lineaarinen } \forall K \in T_h \}$$

Nyt parametreiksi valitaan solmuarvot kaikissa (myös reunan) solmuissa.

Etsi $u_h \in V_h$ s.e. $a(u_h, v) = (f, v) + \langle g, v \rangle \quad \forall v \in V_h$.

Muodostuva yhtälöryhmä on jälleen symmetrinen ja positiividefiniitti.

1.5 Johdatus elementtimenetelmän toteuttamiseen

Palataan hetkeksi Poissonin probleemaan: $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$

Jäykkyysmatriisin alkiot: $\alpha_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$

Sama tulos saadaan summeeraamalla yli kaikkien kolmioiden:

$$\alpha_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{K \in T_h} a_K(\varphi_i, \varphi_j), \qquad (*)$$

missä $a_K(\varphi_i, \varphi_j) = \int_K \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx$.

Nyt $a_K(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ jolleivät sekä N_i ja N_j ole kolmion K solmuja.

Olkoot N_i, N_j, N_k kolmion K solmut.

Kolmion K lokaali elementtijäykkyysmatriisi on 3×3:

$$\begin{pmatrix} a_K(\varphi_i, \varphi_i) & a_K(\varphi_i, \varphi_j) & a_K(\varphi_i, \varphi_k) \\ & a_K(\varphi_j, \varphi_j) & a_K(\varphi_j, \varphi_k) \\ \text{symm.} & & a_K(\varphi_k, \varphi_k) \end{pmatrix};$$

vastaavasti lokaali kuormavektori $\underset{3\times 1}{b_K}$.

Summa $(*)$ voidaan lukea "oikealta vasemmalle" s.e. matriisin kokoaminen tapahtuu muodostamalla jokaista kolmiota (elementtiä) vastaava elementtijäykkyysmatriisi, jonka alkiot lisätään vastinalkioihinsa globaalissa jäykkyysmatriisissa A.

Keskeinen havainto on, että jokaisen kolmion kohdalla kantafunktioiden φ_i rajoittumat ovat samat.

Valitaan elementin kantafunktioiksi nämä rajoittumat, kolmiolle siis, ψ_i, ψ_j, ψ_k, joilla on ominaisuudet

- lineaarisia yli elementin K
- saavat arvon 1 yhdessä kärjessä ja arvon 0 kahdessa muussa

Jokainen lineaarinen funktio w voidaan esittää K:n yli muodossa: $w(x) = w(N_i)\psi_i(x) + w(N_j)\psi_j(x) + w(N_k)\psi_k(x)$

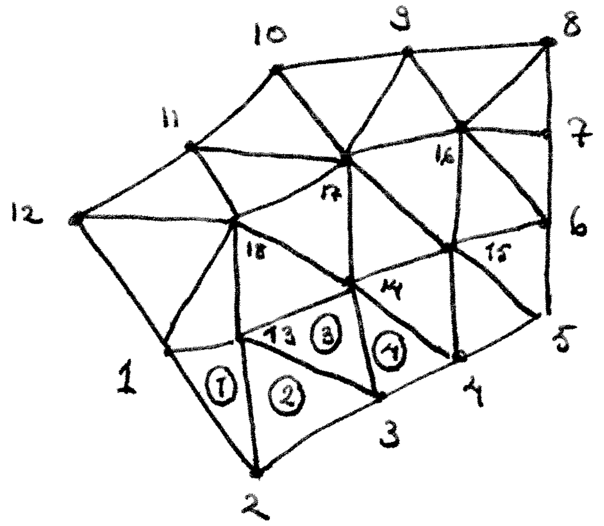
Ohjelman anatomia

(i) datan alustus eli tehtävän kuvaus

- jos aina ratkaistaan samaa tehtävää, tehtävä on yksinkertainen, yleisen esityksen laatiminen on erittäin vaikeaa

(ii) Ω:n diskretointi eli alueen kolmiointi

- verkongenerointialgoritmeja on lukuisia; tehtävä vaikeutuu eksponentiaalisesti 1D → 2D → 3D
- jos verkko on annettu, lineaarisessa tehtävässä (2D) ohjausdata saadaan kolmioiden kärjistä



Kolmioinnin voi esittää

a) pisteiden koordinaattivektorilla

b) kolmioiden solmujen numeroilla

$$T = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 14 & 4 \\ 13 & 13 & 13 & 14 \end{array}\right. \quad \cdots \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ ① & ② & ③ & ④ \end{array} \end{array}$$

(iii) lokaalit jäykkyysmatriisit

(iv) globaalin jäykkyysmatriisin kokoaminen

(v) yhtälöryhmän $A\xi = b$ ratkaisu

- tehtävästä riippuen voi hyvinkin olla motivoitua suorittaa vaiheet (iii) – (v) lomittain tai jopa sivuuttaa kohta (iv)

(vi) ratkaisun visualisointi