Mat - 1.3657 Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden laskentamenetelmiä

Kurssilla käsitellään elementtimenetelmän käytännön toteutukseen liittyviä kysymyksiä.

Tavoite: Kyky laatia oma ratkaisija.

Taustatiedot: Matematiikan peruskurssit

1 JOHDATUS ELEMENTTIMENETELMÄÄN ELLIPTISISSÄ TEHTÄVISSÄ

1.1. Yksiulotteisen mallitehtävän variaatiomuoto

Mallitehtävä: Reuna-arvotehtävä

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \qquad (D)$$

missä f on jatkuva.

Kahdesti integroimalla yhtälö $-u'' = f$ havaitaan, että tehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu u.

Mallitehtävälle voidaan antaa eri tulkintoja; mm.

1) Elastinen nauha ; f vaikuttaa normaalisuunnassa

2) Elastinen palkki

$$\begin{cases} \sigma = Eu' & ; \text{ Hooken laki} \\ -\sigma' = f & ; \text{ tasapainoyhtälö} \\ u(0) = u(1) = 0 & ; \text{ reunaehdot} \end{cases}$$

$u(x)$ on tangentiaalinen siirtymä ;
$f(x)$ tangentiaalinen kuorma ;
E kimmomoduuli

Valitsemalla $E = 1$ ja eliminoimalla σ:n saamme mallitehtävän (D).

Keskeinen idea: Tehtävän (D) ratkaisu on myös erään minimointitehtävän (M) ja variaatiotehtävän (V) ratkaisu.

Notaatio: $(v, w) = \int_0^1 v(x)\, w(x)\, dx$

Määritellään avaruus: $V = \{ v \mid v$ on jatkuva välillä $[0,1]$, v' on paloittain jatkuva ja rajoitettu välillä $[0,1]$ ja $v(0) = v(1) = 0 \}$

Kvadraattinen funktionaali: $F: V \to \mathbb{R}$

$$F(v) = \frac{1}{2}(v', v') - (f, v)$$

Määritelmä 1.1.

(M) Etsi $u \in V$ s.e. $F(u) \leq F(v) \quad \forall\, v \in V$

(V) Etsi $u \in V$ s.e. $(u', v') = (f, v) \quad \forall\, v \in V$

Mekaniikassa: (M) Minimipotentiaalienergiaperiaate
(V) Virtuaalisen työn periaate

Agenda:
a) (D) $\Rightarrow$ (V)
b) (M) $\Leftrightarrow$ (V)
c) (V) $\Rightarrow$ (D)

eli (D) $\Leftrightarrow$ (M) $\Leftrightarrow$ (V)

a) Valitaan testifunktio $v \in V$ ja integroidaan yli välin:

$$-(u'', v) = (f, v)$$

Integroidaan osittain ja muistetaan $v(0) = v(1) = 0$:

$$-(u'', v) = -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + (u', v') = (f, v)$$

$$\Leftrightarrow \quad (u', v') = (f, v)$$

b) Olkoon u (V):n ratkaisu, $v \in V$ ja $w = v - u$, $w \in V$
Nyt $v = w + u$.

$$F(v) = F(w+u) = \frac{1}{2}(u'+w', u'+w') - (f, u+w)$$

$$= \frac{1}{2}(u',u') - (f,u) + \underbrace{(u',w') - (f,w)}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{(w',w')}_{\geq 0}$$

$\geq F(u)$ eli u on (M):n ratkaisu.

Toisaalta, jos u on (M):n ratkaisu, niin mielivaltaiselle $v \in V$ ja positiiviselle ε pätee:

$$F(u) \leq F(u + \varepsilon v), \quad \text{koska } u + \varepsilon v \in V.$$

Differentioituvalla funktiolla $g(\varepsilon) = F(u + \varepsilon v)$ on siis välttämättä minimi pisteessä $\varepsilon = 0$ ja $g'(0) = 0$.

Suora lasku: $g(\varepsilon) = \frac{1}{2}(u',u') + \varepsilon(u',v') + \frac{\varepsilon^2}{2}(v',v')$
$$- (f,u) - \varepsilon(f,v)$$

$\Rightarrow g'(0) = (u',v') - (f,v)$

eli u on (V):n ratkaisu.

Entäpä yksikäsitteisyys? Olkoot $u_1, u_2 \in V$ kaksi (V):n ratkaisua.

$$\begin{cases} (u_1', v') = (f,v) \ \forall v \in V \\ (u_2', v') = (f,v) \ \forall v \in V \end{cases}$$

Vähennetään yhtälöt toisistaan ja valitaan $v = u_1 - u_2 \in V$

$$\int_0^1 (u_1' - u_2')^2 \, dx = 0 \quad \Rightarrow u_1'(x) - u_2'(x) = 0 = (u_1 - u_2)'(x)$$

Siis: $(u_1 - u_2)(x)$ on vakiofunktio välillä $[0,1]$.

$u_1 = u_2$ seuraa reunaehdoista: $u_1(0) = u_2(0) = 0$.

c) Oletetaan, että $u \in V$ toteuttaa ehdon:

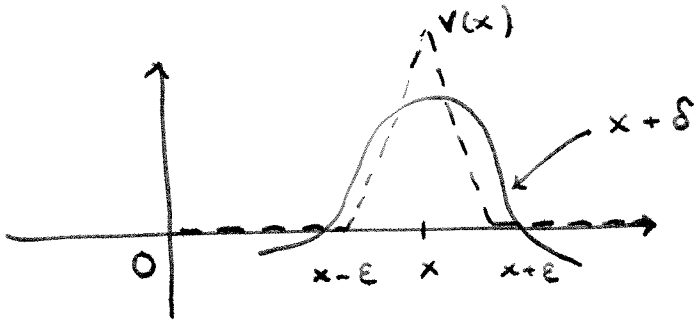
$$\int_0^1 u'v'\,dx - \int_0^1 fv\,dx = 0 \qquad \forall\, v \in V.$$

Oletetaan lisäksi, että u'' on olemassa ja jatkuva. Osittaisintegroimalla ja muistaen $v(0) = v(1) = 0$,

$$-\int_0^1 (u'' + f)\,v\,dx = 0 \qquad \forall\, v \in V.$$

Jatkuvuusoletuksen nojalla $[\,(u'' + f)$ jatkuva$\,]$ välttämättä $(u'' + f)(x) = 0$, $0 < x < 1$, eli u on (D):n ratkaisu.

⌈ Huom. Jos $(u''+f)(x) > 0$ jossain pisteessä x, on se jatkuvuuden nojalla sitä myös jossain x:n ε-ympäristössä.



Aina voidaan valita sopiva $v(x)$ s.e. integraali ei katoa.

⌊

1.2. Elementtimenetelmä malliprobleemalle

Seuraavaksi konstruoidaan edellämääritellyn avaruuden V äärellisdimensioinen aliavaruus V_h, joka muodostuu paloittain määritellyistä lineaarisista funktioista.

Muodostetaan välin $[0,1]$ jako: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M < x_{M+1} = 1$

$I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $h_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, \dots, M+1$,

$h = \max h_j$

Määritellään $V_h = \{ v \mid v$ on lineaarinen joka välillä I_j, jatkuva välillä $[0,1]$, $v(0) = v(1) = 0 \}$

Jotta funktio $v \in V_h$ voidaan määrittää, tarvitaan sopivat parametrit. Tässä luonnollinen valinta on funktion arvot jaon pisteissä: $\eta_j = v(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, M+1$.

Esitetään v sopivassa kannassa:

Kantafunktiot $\varphi_j \in V_h$, $j = 1, \dots, M$

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j \\ 0, & \text{jos } i \neq j, \quad j = 1, \dots, M \end{cases}$$

"Hattu-funktio" saa arvon 1 yhdessä jaon pisteessä ja arvon 0 kaikissa muissa.

Jokainen funktio $v \in V_h$ voidaan esittää muodossa

$$v(x) = \sum_{i=1}^{M} \eta_i \varphi_i(x), \quad x \in [0,1].$$

v on siis kantafunktioiden lineaariyhdistely.

Havaitaan, että V_h on lineaariavaruus, $\dim V_h = M$, varustettuna kannalla $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$.

Määritellään elementtimenetelmä malliprobleemalle (D):

Ritz: Etsi $u_h \in V_h$ s.e. $F(u_h) \leq F(v)$ $\forall v \in V_h$ $(M_h$

Galerkin: Etsi $u_h \in V_h$ s.e. $(u_h', v') = (f, v)$ $\forall v \in V_h$ $(V_h$

Keskitytään (V_h):hon:

Jos $u_h \in V_h$ on ratkaisu, niin $(u_h', \varphi_j') = (f, \varphi_j)$, $j = 1, \dots, M$

$u_h(x) = \sum_{i=1}^{M} \xi_i \varphi_i(x)$, $\xi_i = u_h(x_i)$,

Kertoimet ξ_i voi ratkaista yhtälöryhmästä:

$$\sum_{i=1}^{M} \xi_i (\varphi_i', \varphi_j') = (f, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, M,$$

matriisimuodossa: $A\xi = b$, $\underset{M \times M}{A} = (\alpha_{ij})$, $\xi, b \in \mathbb{R}^M$

$\alpha_{ij} = (\varphi_i', \varphi_j')$

$b_i = (f, \varphi_i)$

Vakiintunut terminologia: A on jäykkyysmatriisi,
b on kuormavektori

Elementtimenetelmälle on tyypillistä, että ratkaistavalla yhtälöryhmällä on rakenne jota on syytä käyttää hyväksi.

Välittömästi nähdään, että $(\varphi_i', \varphi_j') = 0$, jos $|i-j| > 1$, ts. matriisi A on tridiagonaalinen.

Diagonaali: $j = 1, \dots, M$,

$$(\varphi_j', \varphi_j') = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2}\,dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h_{j+1}^2}\,dx = \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}}$$

Ylä- ja aladiagonaali : $j = 2, \ldots, M$,

$$(\varphi_j', \varphi_{j-1}') = -\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2}\,dx = -\frac{1}{h_j} \qquad \text{(ala)}$$

$$(\varphi_{j-1}', \varphi_j') = -\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2}\,dx = -\frac{1}{h_j} \qquad \text{(ylä)}$$

Yleisesti : $(\varphi_j', \varphi_i') = (\varphi_i', \varphi_j')$ eli A on symmetrinen

A on myös positiivi-definiitti :

Valitaan $v(x) = \sum_{j=1}^{M} \eta_j \varphi_j(x)$;

$$\sum_{i,j=1}^{M} \eta_i (\varphi_i', \varphi_j') \eta_j = \left(\sum_{i=1}^{M} \eta_i \varphi_i', \sum_{j=1}^{M} \eta_j \varphi_j' \right)$$

$$= (v', v') \geq 0,$$

missä identiteetti vain jos $v \equiv 0$.

Positiivi-definiittisyys symmetrisille matriiseille : $\underset{M \times M}{A}$, $x \in \mathbb{R}^M$

(i) $x^T A x = \sum_{i,j=1}^{M} x_i a_{ij} x_j > 0$

(ii) $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_M$, ominaisarvot positiivisia.

Malliprobleemalle, kun jako on tasavälinen $h_j = h = \frac{1}{M+1}$

saadaan muoto :

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \xi = b$$