



Kotitehtävät palautetaan harjoitusviikon luennoilla tai muuten sopimuksen mukaan huoneeseen Y316.

Kotitehtävät

KOTITEHTÄVÄ I Tarkastellaan reuna-arvotehtävää

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = f, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0.$$

Tässä u voidaan ajatella palkin poikittaissiirtymäksi ja f on poikittaissuunnassa vaikuttavan voiman intensiteetti.

(a) Osoita, että tehtävälle voi antaa variaatiomuodon: Etsi $u \in W$ s.e.

$$(u'', v'') = (f, v), \quad \forall v \in W,$$

missä $W = \{v \mid v \text{ ja } v' \text{ ovat jatkuvia välillä } [0, 1], v'' \text{ on paloittain jatkuva ja } v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0.\}$

(b) Olkoon $I = [a, b]$ väli ja

$$P_3(I) = \{v \mid v \text{ on polynomi astetta } \leq 3 \text{ eli } v(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, x \in I, a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Osoita, että $v \in P_3(I)$ on yksikäsitteisesti arvojen $v(a), v'(a), v(b), v'(b)$ määräämä. Etsi vastaavat muotofunktiot. (Arvoa $v(a)$ vastaavalla muotofunktiolla on siis ominaisuus, että $v(a) = 1, v'(a) = 0, v(b) = v'(b) = 0$ jne.)

(c) Muodosta W :n kolmannen asteen paloittaisista funktioista muodostuva äärellisdimensioinen aliavaruus W_h . Millaisten parametrien avulla funktiot voi esittää W_h :ssa? Määrää vastaavat kantafunktiot.

(d) Formuloi elementtimenetelmä avaruuden W_h avulla. Muodosta tasavälistä jakoa vastaava jäykkyysmatriisi ja ratkaise tehtävä kahdella elementillä ja vakiokuormalla. Vertaa tarkkaan ratkaisuun.