

①

$$y'' = ty' - 3y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3$$

Eulerin menetelmä: $z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n)$

Muutetaan ensin systeemiä:

Merk. $y_1 = y, \quad y_2 = y'$

$$y_1' = y' = y_2$$

$$y_2' = y'' = ty' - 3y = -3y_1 + ty_2$$

Merk. $z = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad f(t, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -3y_1 + ty_2 \end{bmatrix}$

Sovelletaan Eulerin menetelmää systeemiin

$$z' = f(t, z), \quad z(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$h=0,1$:

$$z_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad z_1 = z_0 + hf(0, z_0) = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -3,3 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = z_1 + hf(0,1, z_1) = \begin{bmatrix} 0,37 \\ -3,543 \end{bmatrix}, \quad \text{virhe} \approx |0,3482 - 0,37| = 0,0218$$

$h=0,2$:

$$z_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad z_1 = z_0 + hf(0, z_0) = \begin{bmatrix} 0,4 \\ -3,6 \end{bmatrix}$$

$$\text{virhe} \approx |0,3482 - 0,4| = 0,0518$$

$h=0,1$ virhe on suunnilleen puolet $h=0,2$ virheestä, kuten on Eulerin menetelmälle ominaista.

2.

$$\Theta'' + \Theta' + \sin \Theta = 0$$

a) $y_1 = \Theta, y_2 = \Theta'$

$$\begin{cases} y_1' = \Theta' = y_2 \\ y_2' = \Theta'' = -\Theta' - \sin \Theta = -\sin(y_1) - y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\sin(y_1) - y_2 \end{cases}$$

b) kriittiset pisteet: $\begin{cases} y_2 = 0 \\ -\sin(y_1) - y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y_2 = 0 \end{cases}$

$$f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -\sin(y_1) - y_2 \end{bmatrix}$$

Jacobian matriisi: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(y_1) & -1 \end{bmatrix}$

Linearisointi kp: na $(k\pi, 0)$:

$$\begin{bmatrix} z_1^{(k)} \\ z_2^{(k)} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(k)} \\ z_2^{(k)} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} z_1^{(k)} = y_1 - k\pi \\ z_2^{(k)} = y_2 \end{cases}$$

c) $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ (-1)^{k+1} & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(1+\lambda) + (-1)^k = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + (-1)^k = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(-1)^{k+1}}}{2}$$

Kun k parillinen: $\lambda = \frac{-1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$, spiraalinen
 (vakavasti) stabiili

Kun k pariton: $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

② jätton

$\lambda_+ > 0, \lambda_- < 0 \Rightarrow$ satula,
pöystabiili

d)

Piste 1:

Heiluri ala-asennossa



hulbamassa oikealle.

(mitäli kulma
0 on



Heilahtelee hieman puolelta toiselle heilahtelun
pienetessä koko ajan trajektorin lähentyessä
kriittistä pistettä (rajatapaus; ei enää heilahtele; stabiili
tasapaino)

Piste 2:

Tälleen ala-asennossa hulbamassa oikealle. Vauhtiin
on juuri tasan niin paljon, että heiluri pääsee kerran
rajatapauksena yläasentoon ! (trajektorin ora
pysähtymen. Trajektorin toinen ora () vastan
hieman tasta jatkettua liikettä , josta
heilahtelee puolelta toiselle kuten a)-kohdassa,
mutta nyt trajektorin lähentyessä oikeanpuolimmaista
kriittistä pistettä.

②... jatkoa

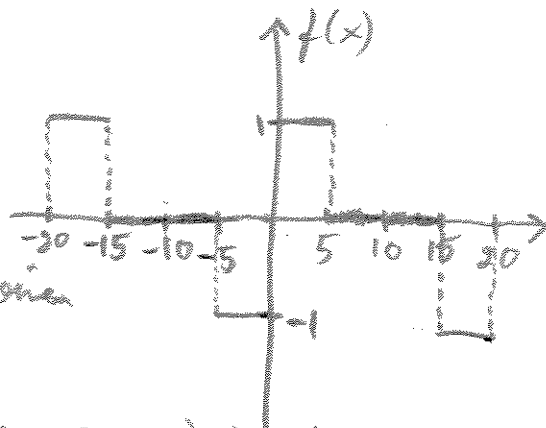
Piste 3:

Heiluri jatkaa kulbomassa aikealle. Vauhtia on nyt sen verran, että heiluri kiepsauttaa kerran ympäri (pyrähtymättä) ja heilastelee väkimen, kuten a) ja b)-kohdissa.

③.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 5 \\ 0, & 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Olkoon $\tilde{f}$ pariton 20-jaksoinen laajennus.



Pariton funktio $\Rightarrow a_0 = a_n = 0$, sinisarja

$L=10$.

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \tilde{f}(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pariton funktio}}}{\frac{2}{L}} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx =$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^5 \sin \frac{n\pi x}{10} dx = \frac{1}{5} \left[-\frac{10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{10}\right) \right]_0^5 =$$

$$= -2 \cdot \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1}{n\pi}$$

$$\left[\begin{array}{l} b_n = \frac{2}{n\pi}, \text{ kun } n \text{ pariton} \\ b_n = 0, \text{ kun } n = 4k \\ b_n = \frac{4}{n\pi}, \text{ kun } n = 4k+2 \end{array} \right]$$

③... jatkoa

Fourier-sarja:

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{10}$$

4 ensimmäistä 0:sta poikittavaa:

$$\left| \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) + \frac{2}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{5\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right|$$

④

yläreuna:

$$u_y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{10}\right)$$

$$A_n = \frac{100}{\sinh(n\pi)} \cdot \frac{1}{5} \int_0^5 \sinh\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx = \frac{200(1 - \cos \frac{n\pi}{2})}{n\pi \sinh(n\pi)}$$

Alareuna:

Voimme määrittää nollaan alareunan sarjasta

$$u_a(x, t) = 85 \sin\left(\frac{2\pi x}{10}\right) \sinh\left(\frac{2\pi}{10}(y-10)\right) \cdot \frac{1}{-\sinh(2\pi)} = \\ = -\frac{85}{\sinh(2\pi)} \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) \sinh\left(\frac{\pi}{5}(y-10)\right)$$

$$\left| u(x, t) = u_y(x, t) + u_a(x, t) \right|$$