

3. välikoe 14.12. 2004

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

1. Sovella *Eulerin menetelmää* alkuarvotehtävään $y'' = ty' - 3y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

Suorita ensin 2 askelta arvolla $h = 0.1$ ja sitten yksi askel arvolla $h = 0.2$.

Vertaa kumpaakin tulosta tarkkaan (4:llä numerolla) arvoon $y(0.2) = 0.3482$ ja totea, että virhe käyttäytyy (kutakuinkin) Eulerin menetelmälle luonteenomaisesti.

Alkuunpääsyohje: Muunna ensin systeemiksi.

2. Tarkastellaan vaimennettua heiluria ja oletetaan, että $k = \frac{g}{L} = 1$ ja vaimennusvakio $c = 1$.

Heilurin liike noudattaa tällöin yhtälöä:

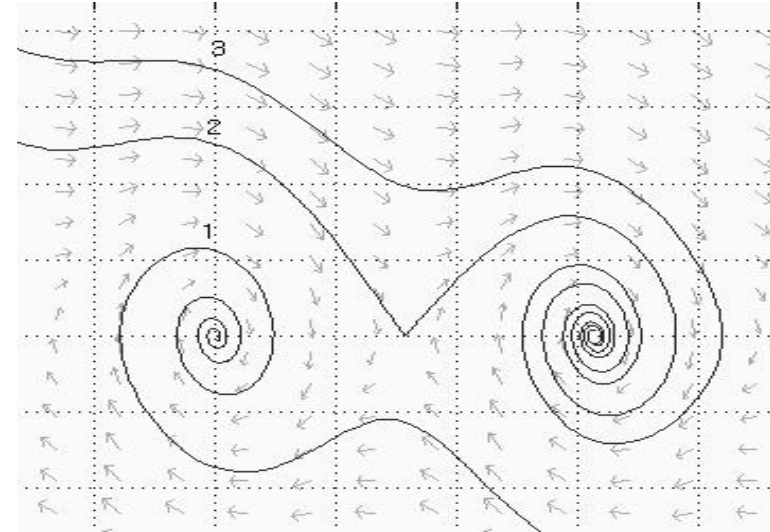
$$\Theta'' + \Theta' + \sin \Theta = 0.$$

(a) Muunna yhtälö ensimmäisen kertaluvun systeemiksi (Merkitse uusia "riippuvia muuttujia" vaikka y_1, y_2 .)

(b) Määritä systeemin kriittiset pisteet ja linearisoi systeemi niissä.

(c) Määritä linearisoitujen luonne ja stabiilisuus. (Muista, että toisen asteen yhtälön ratkaisukaavakin on keksitty.)

(d) Kuvassa 1 on vaaka-akselina $y_1 = \Theta$ ja pystyakselina $y_2 = \Theta'$. Seuraa kuvassa olevaa kolmea trajektoria lähtien kulkemaan ajassa eteenpäin pisteistä 1, 2, 3 ($y_1 = \Theta = 0$). Kerro, mitä kelpo heilurillemme tapahtuu kullakin polulla erityisesti kunkin kuvassa näkyvän (kolmen) kriittisen pisteen läheisyydessä.



Kuva 1: Tehtävän 2 kuva

3. Piirrä funktion $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 5 \\ 0, & 5 < x < 10 \end{cases}$ pariton laajennus 2π -jaksoiseksi välillä $[-20, 20]$ ja muodosta tämän Fourier-sarja.

Huom! Laskun yksityiskohtien täytyy olla näkyvillä, väkinäinen päätyminen oikeaan tulokseen ei tuota pisteitä.

Kirjoita sarjan 4:n ensimmäisen nollasta poikkeavan termin summa näkyviin (kertoimet sievennettynä tarkkoina arvoina).

Osittainen vastaus: $b_n = -2 \frac{\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1}{n\pi}$

4. Neliömuotoisen levyn pinnat on lämpöeristetty reunoja lukuunottamatta. Olkoon neliön sivu $a = 10$ pituusyksikköä. Levyn sivureunat olkoot 0° :ssa, yläreunalla olkoon lämpötila $f(x) = \begin{cases} 100, & 0 < x < 5 \\ 0, & 5 < x < 10 \end{cases}$ ja alareunalla $g(x) = 85 \sin \frac{\pi x}{5}$.

Määritä levyn tasapainolämpötilafunktio $u(x, y)$.

KÄÄNNÄ

Kaavoja, ohjeita

Fourier-sarja

2 L -jaksoisen funktion f Fourier-sarja:

$$a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^\infty b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Laplacen yhtälö

Suorakulmioalue: $[0, a] \times [0, b]$, sivut ja alareuna 0:ssa, yläreuna-arvo: $f(x)$

Ratkaisu:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh(\frac{n\pi y}{a}), \quad A_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

Suorakulmioalue: $[0, a] \times [0, b]$, sivut ja yläreuna 0:ssa, alareuna-arvo: $g(x)$

Ratkaisu:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh(\frac{n\pi}{a}(y-b)), \quad B_n = -\frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$