

①.

a)

$$f(t) = 3t \cdot [u(t-0) - u(t-2)] + 6 \cdot [u(t-2) - u(t-4)] =$$

$$= 3t + (6-3t)u(t-2) - 6u(t-4) =$$

$$= 3t - 3(t-2)u(t-2) - 6u(t-4)$$

$$\underline{\underline{\mathcal{L}(f(t)) = \frac{3}{s^2} - 3e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2} - 6e^{-4s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{3}{s^2}(1 - e^{-2s}) - \frac{6e^{-4s}}{s}}}$$

Tapa 2:

$$\underline{\underline{\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^2 3te^{-st} dt + \int_2^4 6e^{-st} dt =}}$$

$$= 3 \cdot \frac{-1}{s} / te^{-st} + \frac{3}{s} \int_2^4 e^{-st} dt + \frac{-6}{s} / e^{-st} =$$

$$= -\frac{6e^{-2s}}{s} - \frac{3}{s^2} / e^{-st} - \frac{6}{s} (e^{-4s} - e^{-2s}) =$$

$$= -\frac{3}{s^2} e^{-2s} + \frac{3}{s^2} - \frac{6e^{-4s}}{s} = \underline{\underline{\frac{3}{s^2}(1 - e^{-2s}) - \frac{6e^{-4s}}{s}}}$$

b)

$$F(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5} = \frac{s+1+6}{s^2+2s+1+4} = \frac{s+1+6}{(s+1)^2+4} =$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + 3 \cdot \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-t} \cos 2t + 3e^{-t} \sin 2t}}$$

2. $y'' + 2y' + y = \delta(t-2)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

muunnetaan puolittain:

$$s^2 Y - \underbrace{sy(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=1} + 2sY - 2\underbrace{y(0)}_{=0} + Y = \mathcal{L}(\delta(t-2))$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + 2s + 1)Y = 1 + \mathcal{L}(\delta(t-2))$$

$$\Leftrightarrow (s+1)^2 Y = 1 + e^{-2s}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\delta(t-2)) &= \\ &= \int_0^{\infty} \delta(t-2) e^{-st} dt \\ &= e^{-2s} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = te^{-t} + e^{-(t-2)}(t-2)u(t-2)}}$$

3.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 12 \\ 0 & -6 & -18 & 24 & -24 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot (-4) \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 12 \\ 0 & -6 & -18 & 24 & -24 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \cdot (-1) \\ \end{matrix}$$

$$\text{ref}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & \textcircled{3} & 9 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{matrix} 2 \text{ kpl (myös voi päätellä:} \\ 2 \text{ tukialkiota)} \\ \Rightarrow \text{rangki } \underline{\underline{n(A)=2}} \end{matrix}$$

③ ... jatkoo

Nolla-avaruuden dimensio $n(A)=3$

b) Rivinvareuden kanta:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 12 \end{bmatrix},$$

Sarakevaruuden kanta:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Nolla-avaruuden kanta:

$$x_1 = 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 = -2x_3 + 5x_4 - 6x_5$$

$$x_2 = -3x_3 + 4x_4 - 4x_5$$

(merk. $u=x_3, v=x_4, w=x_5$)

$$\begin{bmatrix} -2u + 5v - 6w \\ -3u + 4v - 4w \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kanta: } \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^3 (\lambda - 5)$$

Ominaisarvo $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$\leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ref

Nolla-avaruuden dimensio on 2

$\Rightarrow$ ominaisarvoa 2 vastataan
kaksi lineaarisesti riippu-
matonta ominaisvektoria

Ominaisarvo $\lambda_2 = 5$:

Algebraattinen kertaluku on 1 $\Rightarrow$ geometrisen myös 1

Koska erisuuria ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit

lin. riippumattomat $\Rightarrow$

Vastaus: 3

(A ei diagonalisoidu, koska
 $3 < 4$, missä 4
on koko avaruuden
dimensio)