

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3

Apiola/Perämäki

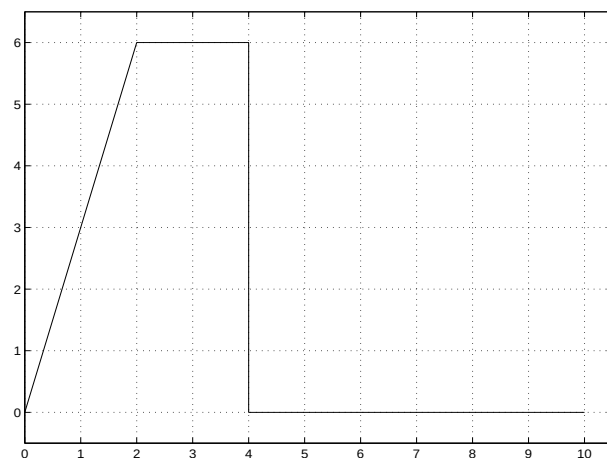
2. välikoe 8.11. 2004

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

1. Määritä (a) $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ja (b) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, kun

$$f(t) \text{ on kuvan mukainen ja } F(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}.$$



TEHTÄVÄ 1 (a), ($f(t) = 0$, KUN $t > 4$)

2. Massa-jousisysteemiä mallintava differentiaaliyhtälö olkoon

$$y'' + 2y' + y = r(t), \text{ alkuehtoina } y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Herätteenä $r(t)$ on positiiviseen suuntaan (alaspäin) tapahtuva äkillinen vasaranisku hetkellä $t = 2$, jota mallinnetaan Dirac'n deltalla $\delta(t - 2)$.

Ratkaise $y(t)$.

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 12 \\ 0 & -6 & -18 & 24 & -24 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Muodosta porrasmuoto $\text{ref}(A)$ ja päättele siitä rangi $r(A)$ sekä nolla-avaruuden dimensio $n(A)$.

(b) Määritä riviavaruuden, sarakeavaruuden ja nolla-avaruuden kannat.

4. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. Lasketaan (Maplella) avuksi:

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^3 (\lambda - 5).$$

Selvitä, miten monta lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria A :lla on (eli mikä on ominaisvektorien virittämän aliavaruuden dimensio), ja onko A diagonalisoituva.

KÄÄNNÄ

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.**
 $u(t) = H(t)$ =yksikköaskelfunktio .

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s), \quad \mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a), \quad \mathcal{L}\{u(t - a)f(t - a)\} = e^{-as}F(s), \quad \mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-as}$$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitykset

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $\deg(P) < \deg(Q)$

1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s - a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.

2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalilla kertoimilla.

3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r , otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1s+C_1}{s^2+bs+c} + \dots + \frac{B_rs+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$