Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3

Apiola/Perämäki

1. välikoe 11.10. 2004

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

1. Laske kaikki juuret $\sqrt[4]{4(i-1)}$, ja piirrä kompleksitasoon juurrettava ja juuret.

2. (a) Määritä kaikki arvot $\ln(-1+i\sqrt{3})$.
   (b) Piirrä z-tason alue

$$\frac{1}{2} \leq |z| \leq 20, \quad -\frac{\pi}{2} \leq arg\, z \leq \frac{\pi}{2}$$

   ja sen kuva (w-tasossa) kuvauksessa $w = Ln\ \ z$ (päähaara).

3. (a) Osoita *Cauchy–Riemannin* yhtälöiden (ja lisäehdon) avulla, että $\sin z$ on analyyttinen koko kompleksitasossa, ja johda derivaatan kaava.
   (b) Määritä pisteet z, joissa $\sin z$ ei ole konforminen.

4. Määritä analyyttinen funktio f, joka kuvaa kulma-alueen $0 \leq arg\, z \leq \frac{\pi}{6}$ yksikkökiekolle $|z| \leq 1$.

Kaavoja ja lauseita

Tässä on kokoelma yleishyödyllistä matematiikkaa. Käytä, jos tunnet tarvetta.

$$\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

$$\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lause Olkoon annettu 3 erillistä pistettä z_1, z_2, z_3 ja toiset kolme erillistä w_1, w_2, w_3. Tällöin on olemassa yksi Möbius-kuvaus f, jolle $f(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$. Kuvaus voidaan esittää yhtälönä:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

Jos jokin esiintyvistä symboleista on ∞, niin se suhde, jossa esiintyy ∞ sekä osoittajassa että nimittäjässä, pannaan 1:ksi.