"Yleistetty" integraali

Funktio $f:(a,b)\to\mathbb{R}^+$ (eli $f(x)\geq 0$) on integroituva välillä (a,b) jos
on olemassa jono funktioita $(f_n(x))$ siten, että
$f_1(x)\leq f_2(x)\leq\ldots\leq f_n(x)\leq\ldots$ ja $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ kun $x\in(a,b)$,
f_n on paloittain jatkuva välillä (a,b) ja 0 rajoitetun välin ulkopuolella
(esimerkiksi $f_n(x)=\min\{n,f(x)\}$ kun $|x|\leq n$ ja $x\in(a,b)$ ja 0 muuten)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x<\infty$$

Funktio $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ on integroituva jos
funktiot $f_+(x)=\max\{f(x),0\}$ ja $f_-(x)=\max\{-f(x),0\}$ ovat integroituvia

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x$$

Funktio $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ on integroituva jos
funktiot $\operatorname{Re} f(x)$ ja $\operatorname{Im} f(x)$ ovat integroituvia

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x<\infty\Leftrightarrow\alpha>-1$$
$$\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x<\infty\Leftrightarrow\alpha<-1$$
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x<\infty\Leftrightarrow\beta<1$$
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x<\infty\Leftrightarrow\beta>1$$

Jos $0\leq f(x)\leq g(x)$, $x\in(a,b)$
ja f ja g ovat esim. paloittain jatkuvia niin
g on integroituva välillä $(a,b)\Rightarrow f$ on integroituva välillä (a,b)
f ei ole integroituva välillä $(a,b)\Rightarrow g$ ei ole integroituva välillä (a,b)

Sijoitukset

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = ?$$
$$g(x) = t$$
$$x = a \Rightarrow t = g(a)$$
$$x = b \Rightarrow t = g(b)$$
$$g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow$$
$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = ?$$
$$x = h(t)$$
$$x = a \Rightarrow t = h^{-1}(a)$$
$$x = b \Rightarrow t = h^{-1}(b)$$
$$\mathrm{d}x = h'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow$$
$$\int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t$$

Osittaisintegrointi

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big/_{a}^{b} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Rationaalifunktioden integrointi

Rationaalifunkion integraali voidaan laskea kunhan nimittäjän nollakohdat löytyvät

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int s(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

missä polynomin $r(x)$ aste on pienempi kuin polynomin $q(x)$ aste

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2}, \qquad x_1 \neq x_2$$

$$A_1 = \lim_{x\to x_1} \frac{(ax+b)(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{ax_1+b}{x_1-x_2}$$

$$A_2 = \lim_{x\to x_2} \frac{(ax+b)(x-x_2)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{ax_2+b}{x_2-x_1}$$

$$\frac{ax+b}{(x-x_0)^2} = \frac{a}{x-x_0} + \frac{ax_0+b}{(x-x_0)^2}$$

$$\frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}a\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\alpha a+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x = \ln((x-\alpha)^2+\beta^2) + C$$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x \underset{(x-\alpha)/\beta = t}{\overset{\text{sijoituksella}}{=}} \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\beta}\arctan(t) + C = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$$

Separoituvat differentiaaliyhtälöt

$$y'(t) = f\big(y(t)\big)g(t) \Rightarrow y(t) = ?$$

Jos y_* on f:n nollakohta, eli $f(y_*) = 0$ niin

$y(t) = y_*$, $t \in \mathbb{R}$ on (vakio)ratkaisu

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t)$$

$$\int \frac{y'(t)}{f(y(t))}\,\mathrm{d}t = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$y(t) = u \Rightarrow y'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$$

$$\int \frac{1}{f(u)}\,\mathrm{d}u = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$H'(u) = \frac{1}{f(u)} \qquad G'(t) = g(t)$$

$$H(u) = G(t) + C$$

$$y(t) = H^{-1}(G(t) + C)$$

Numeerinen integrointi

Keskipistemenetelmä

$$x_j = a + h(j - \tfrac{1}{2}), \quad j = 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$M_n = h(f(x_1) + \ldots + f(x_n)) = h \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

$$\left| M_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2} = \frac{K(b-a)}{24} h^2, \quad |f''(x)| \le K$$

Suunnikasmenetelmä

$$x_j = a + hj, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$T_n = h\big(\tfrac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2} f(x_n)\big)$$

$$\left| T_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2} = \frac{K(b-a)}{12} h^2, \quad |f''(x)| \le K$$

Simpsonin menetelmä

$$x_j = a + hj, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

n on parillinen

$$S_n = \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)$$

$$\left| S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \frac{K(b-a)^5}{180n^4} = \frac{K(b-a)}{180} h^4, \quad |f^{(4)}(x)| \le K$$

Erilaisilla sijoituksilla $t = \dfrac{1}{x}$, $t^2 = \dfrac{1}{x}$, $t^2 = x$, $t^m = x$

saadaan usein integraalista $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ integraali $\displaystyle\int_c^d g(t)\,\mathrm{d}t$

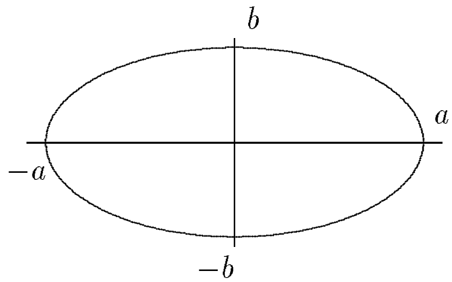
jossa $-\infty < c < d < \infty$ ja g on rajoitettu ja (monta kertaa) derivoituva

niin, että integraalin $\displaystyle\int_c^d g(t)\,\mathrm{d}t$ numeerinen laskeminen onnistuu hyvin

Toisen asteen käyrät

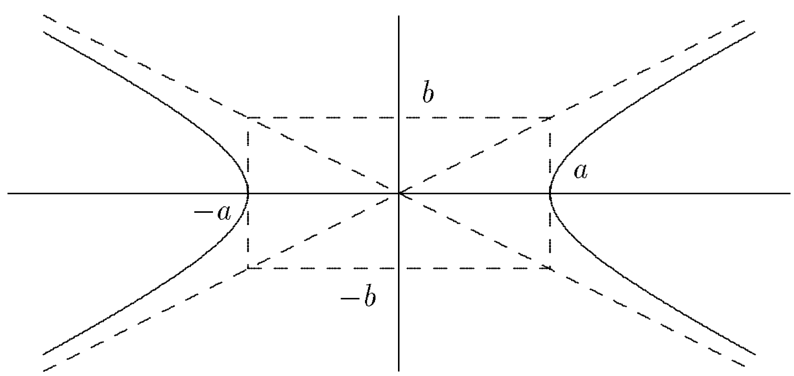
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

on ellipsin yhtälö



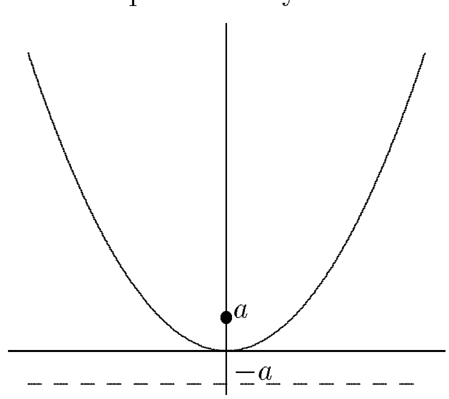
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

on hyperbelin yhtälö



$$y = \frac{1}{4a}x^2$$

on paraabelin yhtälö



$$\boxed{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

A:n ominaisarvot ovat λ_1 ja λ_2

ja vastaavat ominaisvektorit X_1 ja X_2 valitaan niin, että $|X_j| = 1$.

Jos $V(:, j) = X_j$ ja $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ niin

$$\boxed{\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + d'x' + e'y' + f = 0}$$

missä $\begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} V$

Parametriset käyrät

Käyrän $\{\, (x(t), y(t)) \mid t \in [a, b] \,\}$ $((x(t), y(t)) \neq (x(s), y(s)),\ t \neq s)$ pituus on

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Jos käyrä $\{\, (x(t), y(t)) \mid t \in [a, b] \,\}$ on umpinainen $(x(a) = x(b),\ y(a) = y(b))$, niin käyrän sisäpuolelle jäävän alueen pinta-ala on

$$\pm \int_a^b x'(t)y(t)\,\mathrm{d}t = \mp \int_a^b x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$$

Käyrä $\{\, (x(t), y(t)) \mid t \in [a, b] \,\}$ on sileä jos

jos käyrällä on jatkuva yksikkötangenttivektori

(”joka ei vaihda suuntaansa”)

eli funktiot $x(t)$ ja $y(t)$ ovat jatkuvasti derivoituvia,

$(x(t), y(t))$ ei ole vakio millään avoimella välillä ja

raja-arvot $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$ ja $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$

ovat olemassa myös niissä pisteissä, missä $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$

eli on olemassa $f(t)$ ja $g(t)$ s.e. ne ovat jatkuvia ja

$f(t) = \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$ ja $g(t) = \dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$ kun $x'(t)^2 + y'(t)^2 > 0$

Napakoordinaatit

$$\boxed{\begin{array}{c}\left.\begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta)\end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y) \sim [r,\theta] \\ [-r,\theta] = [r,\theta+\pi], \quad r \geq 0\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Käyrän } r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta \text{ pituus on} \\ \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Sektorin } 0 \leq r \leq f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta \text{ pinta-ala on} \\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta\end{array}}$$

Vektorilasku

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x\overline{b_x} + a_y\overline{b_y} + a_z\overline{b_z}$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\alpha)$$

missä α on vektoreiden **a** ja **b** välinen kulma

Vektori **a** on kohtisuorassa vektoria **b** vastaan eli $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ jos

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$$

Vektorin **a** projektio vektorille **b** on

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

Vektorin **a** **skalaari**projektio vektorille **b** on

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ on vektoreiden **a** ja **b** määräämän suunnikkaan pinta-ala

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{b}$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\alpha)$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$$

on $\pm$ vektoreiden **a**, **b** ja **c** määräämän suuntaissärmiön tilavuus.

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$$

Vektorifunktioiden derivointi, kaarevuus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)\big) = \mathbf{a}'(t)\cdot\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}'(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}(t)\big) = \mathbf{a}'(t)\times\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}'(t)$$

Jos $|\mathbf{a}(t)|$ on vakio niin $\mathbf{a}'(t)\cdot\mathbf{a}(t) = 0$ eli $\mathbf{a}'(t)\perp\mathbf{a}(t)$

$\mathbf{r}(t)$ paikka

$\mathbf{r}'(t)$ nopeus

$|\mathbf{r}'(t)|$ vauhti

$\mathbf{r}''(t)$ kiihtyvyys

Käyrän $\mathbf{r}(s)$ parameterina on kaarenpituus jos

$$|\mathbf{r}'(s)| = 1$$

Jos käyrä $\mathbf{r}(s)$ on parametrisoitu kaarenpituudella niin

$$\hat{\mathbf{T}}(s) = \mathbf{r}'(s)$$

$$\kappa(s) = |\hat{\mathbf{T}}'(s)| \text{ on kaarevuus}$$

$$\hat{\mathbf{N}}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\hat{\mathbf{T}}'(s) \text{ on päänormaali}$$

$$\hat{\mathbf{B}}(s) = \hat{\mathbf{T}}(s)\times\hat{\mathbf{N}}(s) \text{ on sivunormaali}$$

$$\hat{\mathbf{B}}'(s) = -\tau(s)\hat{\mathbf{N}}(s) \text{ missä } \tau(s) \text{ on kierevyys}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{T}}\\ \hat{\mathbf{N}}\\ \hat{\mathbf{B}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{T}}\\ \hat{\mathbf{N}}\\ \hat{\mathbf{B}}\end{pmatrix}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t))\cdot\mathbf{r}'''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|^2}$$

Käyräintegraalit

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

missä $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ on käyrän C parametriesitys

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \Big(P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z \Big)$$

jos $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

missä $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ on käyrän C parametriesitys