

KOMPLEKSILUVUT

$$z = x + iy = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

$$\operatorname{Re}(x + iy) = x$$

$$\operatorname{Im}(x + iy) = y$$

Liittoluku eli konjugaatti

$$\bar{z} = x - iy, \quad z = x + iy$$

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

Moduuli eli itseisarvo

$$\operatorname{mod}(z) = |z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = x + iy$$

Kolmioepäyhtälö

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Argumentti eli vaihekulma, $\arg(z) = \theta$

Jos $\operatorname{Re}(z) = x$ ja $\operatorname{Im}(z) = y$ niin z :n argumentti on

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2n\pi, & x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi + 2n\pi, & x < 0, \\ \frac{y}{|y|} \frac{\pi}{2} + 2n\pi, & x = 0 \end{cases}$$

Polaarimuoto

$$z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |z|e^{i\theta} \Leftrightarrow \theta = \arg(z)$$

eli jos $|z| = r$ ja $\arg(z) = \theta$ niin

$$\operatorname{Re}(z) = r \cos(\theta) \quad \text{ja} \quad \operatorname{Im}(z) = r \sin(\theta)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$|z^n| = |z|^n, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg(z^n) = n \arg(z), \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2), \quad \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$$

$$\Leftrightarrow |z_1| = |z_2|, \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

missä $\theta_1 = \arg(z_1)$ ja $\theta_2 = \arg(z_2)$

$$\begin{aligned}
z^n &= w = |w|e^{i\varphi} \quad (\text{eli } \varphi = \arg(w)) \Rightarrow z = ? \\
|z| &= r, \quad \arg(z) = \theta \Rightarrow |z^n| = r^n, \quad \arg(z^n) = n\theta \\
r^n &= |w|, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \\
&\Rightarrow \\
|z| &= r = \sqrt[n]{|w|}, \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \\
&\Rightarrow \\
z &= w^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{w} \\
&= \sqrt[n]{|w|} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

Eksponttifunktio

$$\exp(x + iy) = e^{x+iy} \stackrel{\text{def}}{=} e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im} z$$

Logaritmifunktio

$$z = \ln(w) \Leftrightarrow w = e^z$$

$$\Leftrightarrow z = \ln(|w|) + i(\arg(w) + 2n\pi), \quad n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{koska jos } z = x + iy \text{ niin } |e^z| = e^x \text{ ja } \arg(e^z) = y$$

$$\text{jolloin } e^x = |w|, \text{ eli } x = \ln(|w|) \text{ ja } y = \arg(w) + 2n\pi.$$

MATRIISILASKU

$m \times n$ -matriisi

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} = (A(j, k)) = (a_{jk})$$

Transpoosi, A^T

$$B = A^T \Leftrightarrow B_{j,k} = A_{k,j}$$

Summa: $A + B = C$, A , B ja C $m \times n$ -matriiseja

$$C_{j,k} = A_{j,k} + B_{j,k}$$

Skalaarilla kertominen: $\lambda A = C$

$$C_{j,k} = \lambda A_{j,k}$$

Hermitointi: $\overline{A}^T = C$

$$C_{j,k} = \overline{A_{k,j}}$$

eli transpoosi ja kompleksikonjugointi

Tulo: $C = AB$, A on $m \times n$ -, B on $n \times p$ - ja C on $m \times p$ -matriisi

$$C_{j,k} = \sum_{q=1}^n A_{j,q} B_{q,k}$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$A(BC) = (AB)C$ jos A on $m \times n$ -, B on $n \times p$ ja C on $p \times q$

Yleensä $AB \neq BA$

$0_{m \times n}$ tai 0 on $m \times n$ -matriisi, jonka kaikki alkiot ovat 0

$I_{m \times m}$ tai I on $m \times m$ -matriisi jolle pätee

$$I_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{jos } j = k, \\ 0, & \text{jos } j \neq k. \end{cases}$$

$$AI = IA = A$$

$m \times n$ matriisi A on neliömatriisi jos $m = n$

$m \times 1$ matriisi, missä $m > 1$, on pystyvektori
 $1 \times m$ matriisi, missä $m > 1$, on vaakavektori

$m \times m$ matriisi A on

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{lävistäjämatrissi jos } A_{j,k} = 0 \text{ kun } j \neq k \\ \text{symmetrinen jos } A^T = A \\ \text{ortogonaalinen jos } A^T A = A A^T = I \\ \text{kääntyvä eli säännöllinen jos sillä on} \\ \text{käänteismatriisi } A^{-1} \text{ s.e. } A A^{-1} = A^{-1} A = I \end{array} \right.$$

$m \times m$ matriisi A on

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{yläkolmiomatriisi jos } A_{j,k} = 0 \text{ kun } j > k \\ \text{aläkolmiomatriisi jos } A_{j,k} = 0 \text{ kun } j < k \\ \text{vinosymmetrinen jos } A^T = -A \\ \text{hermiittinen jos } \overline{A}^T = A \\ \text{vinohermiittinen jos } \overline{A}^T = -A \\ \text{unitaarinen jos } \overline{A}^T A = A \overline{A}^T = I \end{array} \right.$$

Matriisi on siis ”suorakulman muotoinen” lukukaavio. Matriisin A alkioihin tai elementteihin voidaan viitata monella eri tavalla, esim. $A_{i,j}$, A_{ij} (jolloin ei ole selvää onko A_{123} alkio $A_{1,23}$ vai $A_{12,3}$), $A(i,j)$, $A[i,j]$, a_{ij} jne. Oleellisinta on kuitenkin, että ensimmäinen indeksi viittaa vaakariviin ja toinen pystysarakkeeseen.

GAUSSIN ALGORITMI

Sallitut rivioperaatiot

- (i) Lisätään rivi kerrottuna vakiolla toiseen riviin
- (ii) Vaihdetään kaksi riviä
- (iii) Kerrotaan rivi nollasta poikkeavalla vakiolla

Tavoiteena porrasmuoto

$m \times n$ matriisi A on porrasmuotoinen mikäli ehdosta

$$A_{j,k} \neq 0 \text{ ja } A_{j,q} = 0 \text{ kun } 1 \leq q < k$$

seuraa, että

$$A_{p,q} = 0 \text{ kun } j < p \leq m \text{ ja } 1 \leq q \leq k$$

Porrasmuotoisen $m \times n$ -matriisin (j, k) -alkio on **tukialkio**, jos

$$A_{j,k} \neq 0 \text{ ja } A_{j,q} = 0 \text{ kun } 1 \leq q < k$$

Matriisi B on A :n porrasmuoto jos B on saatu A :sta soveltamalla Gaussin algoritmin rivioperaatioita

Porrasmuotoisen yhtälösystemin ratkaiseminen:

Jos sarakkeella k ei ole tukialkiota, niin tuntematon x_k voidaan valita vapaasti.

Jos elementti (j, k) on tukialkio, ja tuntemattomat $x_{k+1}, \dots, x_n$ on laskettu, niin tuntematon x_k voidaan ratkaista yhtälöstä j .

Jos yhtälösystemissä on yhtälö joka on muotoa

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = a \text{ missä } a \neq 0$$

niin yhtälösystemillä ei ole ratkaisuja.

Osittaistuenta:

Vaihdetään rivejä siten, että tukialkio on itseisarvoltaan mahdollisimman iso

Rangi:

Matriisin rangi on sen porrasmuodossa olevien tukialkioiden lukumäärä

KÄÄNTEISMATRIISI

Käänteismatriisi

Matriisilla A on käänteismatriisi A^{-1} jos

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

A :lla käänteismatriisi $\Leftrightarrow A$ on säännöllinen $\Leftrightarrow A$ on kääntyvä

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Käänteismatriisi Gaussin algoritmilla

$$(A \ I) \sim \dots \text{rivioperaatioilla} \dots \sim (I \ A^{-1})$$

$n \times n$ -matriisi A on säännöllinen eli kääntyvä $\Leftrightarrow$

A :n rangi on $n \Leftrightarrow$

yhtälön $AX = 0$ ainoa ratkaisu on $0 \Leftrightarrow$

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$

A :n vaakarivivektorit ovat lineaarisesti riippumattomia $\Leftrightarrow$

A :n pystysarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomia

DETERMINANTIT

$$\det((a)) = a$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = A_{1,1} \begin{vmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} - A_{1,2} \begin{vmatrix} A_{2,1} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,3} \end{vmatrix} + A_{1,3} \begin{vmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} A_{j,k} \det(\underset{j,k}{\mathbb{A}}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} A_{j,k} \det(\underset{j,k}{\mathbb{A}})$$

missä $\underset{j,k}{\mathbb{A}}$ on matriisi A josta on poistettu vaakarivi j ja pystysarake k

Ensimmäinen yhtälö on määritelmä kun $j = 1$,
kaavojen muut tapaukset on todistettava

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

$$n \times n\text{-matriisi } A \text{ on säännöllinen} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A\text{:n rangi on } = n.$$

$$\text{Ylä- tai alakolmiomatriisin determinantti on lävistäjäalkioiden tulo}$$

Determinantti Gaussin algoritmilla:

$$A \rightsquigarrow B \text{ (Vaihdetaan kaksi riviä)} \Rightarrow \det(B) = -\det(A)$$

$$A \rightsquigarrow B \text{ (Lisätään rivi kerrottuna vakiolla toiseen riviin)} \Rightarrow \det(B) = \det(A)$$

$$A \rightsquigarrow B \text{ (Kerrotaan rivi nolasta poikkeavalla vakiolla } c) \Rightarrow \det(B) = c \det(A)$$

$$A_{j,k} = 0 \quad j > k \Rightarrow \det(A) = A_{1,1} \cdot A_{2,2} \cdot \dots \cdot A_{n,n}$$

2×2 ja 3×3 matriisien determinatit tulevat usein laskettaviksi, $m \times m$ matriisien determinantit, missä $m \gg 3$ tarvitaan harvemmin (ainakin numeerisesti laskettuina) ja koko determinantin käsite on valitettavan hankala ja ei-intuitiivinen!

CRAMERIN SÄÄNTÖ

$$\begin{array}{cccccc}
 A_{1,1}x_1 & +A_{1,2}x_2 & \dots & +A_{1,m}x_m & = & b_1 \\
 A_{2,1}x_1 & +A_{2,2}x_2 & \dots & +A_{2,m}x_m & = & b_2 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
 A_{m,1}x_1 & +A_{m,2}x_2 & \dots & +A_{m,m}x_m & = & b_m
 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$x_j = \frac{\det(C_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

missä C_j on “matriisi A , jossa j :s pystysarake

on korvattu pystyvektorilla $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ”

LINEAARINEN RIIPPUMATTOMUUS JA KANNAT

Vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ ovat **lineaarisesti riippumattomia** jos

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

eli $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ ainoastaan kun $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

Vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ ovat **lineaarisesti riippuvia** jos

ne eivät ole lineaarisesti riippumattomia, eli

ainakin yksi vektoreista voidaan kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa, eli

$$\mathbf{v}_j = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_{j-1} \mathbf{v}_{j-1} + \beta_{j+1} \mathbf{v}_{j+1} + \dots + \beta_m \mathbf{v}_m$$

Vektoreiden $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ virittämä vektoriavaruus on

$$\{ \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{w}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}$$

Vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ muodostavat vektoriavaruuden W kannan

eli ne ovat kantavektoreita, jos

ne ovat lineaarisesti riippumattomia (W :n vektoreita) ja

jokainen W :n vektori $\mathbf{w}$ voidaan esittää (yksikäsitteisesti) muodossa

$$\mathbf{w} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \beta_m \mathbf{v}_m.$$

Vektoriavaruuden W dimensio on silloin m .

Jos B on matriisin A porrasmuoto, eli

B on saatu A :sta soveltamalla Gaussin algoritmin rivioperaatioita
niin

B :n nollasta poikkeavat vaakarivivektorit muodostavat

A :n vaakarivivektoreiden virittämän vektoriavaruuden kannan

ja

jos B :n tukialkiot ovat pystysarakkeilla $k_1, k_2, \dots, k_m$ niin

A :n pystysarakkeet $A_{:,k_1}, A_{:,k_2}, \dots, A_{:,k_m}$ muodostavat

A :n pystysarakevektoreiden virittämän vektoriavaruuden kannan

OMINAISARVOT

Jos $AX = \lambda X$, $X \neq \mathbf{0}$
niin λ on A :n ominaisarvo ja X on vastaava ominaisvektori

$\det(A - \lambda I)$ on A :n karakteristinen polynomi

$$\lambda \text{ on } A\text{:n ominaisarvo} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

Jos matriisilla A on ominaisarvoinaan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ja $\lambda_i \neq \lambda_j$ kun $i \neq j$
niin vastaavat ominaisvektorit $X_1, X_2, \dots, X_m$ ovat lineaarisesti riippumattomia

Symmetrisen (ja reaalisen) matriisin ominaisarvot ovat reaalisia
ja (eri ominaisarvoihin liittyvät) ominaisvektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan

Jos A on $n \times n$ matriisi, jolla on ominaisarvot

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

ja ominaisvektorit

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

ja jos matriisi V , jolle pätee $V_{:,j} = X_j$, on kääntyvä

eli, ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, niin

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} V^{-1}$$

$$A^k = V \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} V^{-1}$$

MATRIISIN NORMI

Jos X on pystyvektori, niin sen pituus on

$$\|X\| = \sqrt{X^T X}$$

tai $\sqrt{\overline{X}^T X}$

Jos A on $m \times n$ matriisi, niin sen **normi** $\|A\|$ määritellään kaavalla

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$$

$$\|AX\| \leq \|A\| \|X\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$\|A\|$ on matriisin $A^T A$ (tai AA^T) suurimman ominaisarvon neliöjuuri
(tai matriisin $\overline{A}^T A$ tai $A\overline{A}^T$ suurimman ominaisarvon neliöjuuri jos A on kompleksinen)