

Esimerkki (Lay luku 5.5) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{pmatrix}.$$

Ominaisarvot:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1.6\lambda + 1 \implies \lambda = 0.8 \pm 0.6i.$$

Ominaisvektorit:

- $\lambda = 0.8 - 0.6i$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{pmatrix}.$
- $\lambda = 0.8 + 0.6i$: $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{pmatrix}.$

Diagonalisointi:

$$A = B\Lambda B^{-1}, \text{ jossa } \begin{cases} B &= (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} -2 - 4i & -2 + 4i \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} 0.8 - 0.6i & \\ & 0.8 + 0.6i \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ongelma: A on reaalinen mutta diagonalisoinnissa $\mathbb{C}$ -alkioita.

Sen sijaan, toinen hajotelma $A = PCP^{-1}$ jossa vain reaalisia alkioita:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &=: \mathbf{u} + i\mathbf{w} && \text{Re- ja Im-osat erikseen} \\ \lambda_1 &=: a + ib \end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_1 &= A\mathbf{u} + iA\mathbf{w} \\ &= \lambda_1\mathbf{v}_1 = (a + ib)(\mathbf{u} + i\mathbf{w}) \\ &= a\mathbf{u} - b\mathbf{w} + i(b\mathbf{u} + a\mathbf{w}) \end{aligned}$$

josta reaali- ja imaginaariosat erottuvat:

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= a\mathbf{u} - b\mathbf{w} \\ A\mathbf{w} &= b\mathbf{u} + a\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Järjestetään matriisi*vektori -muotoihin:

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= (\mathbf{u} \quad \mathbf{w}) \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \\ A\mathbf{w} &= (\mathbf{u} \quad \mathbf{w}) \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Yhdistetään nämä: $P := (\mathbf{u} \ \mathbf{w})$

$$\begin{aligned} AP &= (A\mathbf{u} \ A\mathbf{w}) = (P \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \ P \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}) \\ &= P \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Merkitään $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ ja huomataan $\exists P^{-1}$ joten haluttu hajotelma löytyi:

$$A = PCP^{-1}.$$

Aiemmasta tiedetään: C on kiertomatriisi (kulman $\varphi = \arctan(\frac{4}{-3})$ verran vastapäivään) joten A on similaarinen kiertomatriisin kanssa.

Yleisemmin : jos A on 2×2 reaalinen matriisi jolla kompleksiset ominaisarvot λ_1 ja λ_2 , pätee $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ (kompleksikonjugaatti). Vastaavat ominaisvektoritkin ovat toistensa kompleksikonjugaatteja: $\mathbf{v}$ ja $\bar{\mathbf{v}}$. Merkitsemällä $\mathbf{u} = \operatorname{Re}(\mathbf{v})$, $\mathbf{w} = \operatorname{Im}(\mathbf{v})$, $a = \operatorname{Re}(\lambda)$, $b = \operatorname{Im}(\lambda)$

$$P := (\mathbf{u} \ \mathbf{w}) \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

saadaan

$$A = PCP^{-1},$$

jossa kaikki hajotelman alkiot reaalisia.