

OMINAISARVOISTA JA OMINAISVEKTOREISTA

Olkoon $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ avaruuden $\mathbf{R}^n$ piste (l. vektori). Vektori $\mathbf{x}$ samaistetaan $n \times 1$ -matriisiin $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ kanssa, ts. voidaan yhtä hyvin kirjoittaa

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Tällöin $1 \times n$ -matriisia $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ merkitään $\mathbf{x}^T$. Nyt esim. pistetulo $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ voidaan laskea matriisitulona

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = (x_1 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Määritelmä: Olkoon A (reaalinen) $n \times n$ -matriisi. Avaruuden $\mathbf{R}^n$ vektori $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ on matriisin A *ominaisvektori*, jos $A\mathbf{x}$ on yhdensuuntainen (siis saman- tai vastakaissuuntainen) $\mathbf{x}$:n kanssa, ts. jos on olemassa reaaliluku λ , jolla $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Tällöin λ on ominaisvektoriin $\mathbf{x}$ liittyvä matriisin A *ominaisarvo*.

(Huom: Jos $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, niin yhtälö $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ on voimassa λ :n arvosta riippumatta eikä siis sisällä mitään ehtoa. Siksi $\mathbf{0}$ ei ole hyväksyttävä ominaisvektori.

Toinen huom: Ei ole millään tavalla kiellettyä, että olisi $\lambda = 0$.)

Esim: Olkoon $A = \begin{pmatrix} -21 & 12 \\ -40 & 23 \end{pmatrix}$. Vektori $\mathbf{u} = (1,1)$ ei ole A :n ominaisvektori, sillä

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -21 & 12 \\ -40 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -17 \end{pmatrix},$$

eikä $A\mathbf{u} = (-9, -17)$ ole yhdensuuntainen $\mathbf{u}$:n kanssa, ts. mikään luku λ ei voi toteuttaa yhtälöä $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$.

Toisaalta, jos $\mathbf{v} = (1,2)$, niin $A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$, joten $\mathbf{v}$ on A :n ominaisvektori; ominaisvektoriin $\mathbf{v}$ liittyvä A :n ominaisarvo on 3. //

Ominaisarvojen löytäminen: Jos λ on neliömatriisin A ominaisarvo, on olemassa jokin λ :aan liittyvä A :n ominaisvektori $\mathbf{x}$. Tällöin $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ eli

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(Tässä I on yksikkömatriisi. Koska $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$, voidaan kirjoittaa $\lambda\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$.)

Tämä on $n \times n$ -yhtälöryhmä, jonka oikea puoli on $\mathbf{0}$. Koska $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti on välttämättä 0, ts.

$\det(A - \lambda I) = 0.$

Tämän yhtälön vasen puoli on muuttujan λ polynomi, jonka asteluku on n . Polynomi $\det(A - \lambda I)$ on matriisin A *karakteristinen polynomi*; sen reaalijuuret ovat siis A :n (reaaliset) ominaisarvot. Karakteristisen polynomin mahdolliset kompleksijuuret ovat A :n kompleksiset ominaisarvot; ne eivät liity mihinkään reaalisiin ominaisvektoreihin.

Esim: 1. Olkoon $A = \begin{pmatrix} -21 & 12 \\ -40 & 23 \end{pmatrix}$ (joka esiintyi jo edellisessä esimerkissä).

Halutaan löytää sellaiset reaalityyppiset λ , että yhtälöllä $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ on jokin ratkaisu $\mathbf{x} = (x,y) \neq (0,0)$. Siis

$$\begin{pmatrix} -21 & 12 \\ -40 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{eli} \quad \begin{pmatrix} -21-\lambda & 12 \\ -40 & 23-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Koska yhtälöryhmä on homogeeninen (oikea puoli = $\mathbf{0}$) ja $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, on oltava

$$\begin{vmatrix} -21-\lambda & 12 \\ -40 & 23-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{eli} \quad (-21-\lambda)(23-\lambda) + 12 \cdot 40 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

A:n karakteristinen polynomi on siis $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$, jonka juuret - ts. A:n ominaisarvot - ovat $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = 3$. //

2. Olk. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 \Rightarrow$ B:llä on kaksinkertainen ominaisarvo 2 (ts. karakteristisen polynomin 2-kertainen juuri); ei muita ominaisarvoja. (nimitys: ominaisarvon *kertaluku* = juuren kertaluku)

3. Olk. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 + 1 \Rightarrow$ C:llä ei ole reaalisia ominaisarvoja (kylläkin kompleksiset ominaisarvot $2 \pm i$).

Ominaisvektorien löytäminen: Jos λ on matriisin A ominaisarvo, λ :aan liittyvät ominaisvektorit löydetään suoraan määritelmää soveltaen, siis ratkaisemalla yhtälö $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$:

Esim: 1. Olkoon A sama kuin yllä. Jos $\mathbf{x} = (x,y)$ saadaan

$$\begin{cases} -21x + 12y = \lambda x, \\ -40x + 23y = \lambda y. \end{cases}$$

Kun sijoitetaan $\lambda = \lambda_1 = -1$, yhtälöryhmä redusoituu yhtälöksi $3y = 5x$, jonka ratkaisut, lukuunottamatta ratkaisua $x = y = 0$, siis ovat ominaisarvoon -1 liittyvät A:n ominaisvektorit. Siis esim. vektori $\mathbf{b}_1 = (3,5)$ on eräs ominaisvektori, ja muut (ominaisarvoon -1 liittyvät) ovat vektorit $t\mathbf{b}_1 = (3t,5t)$, $t \neq 0$. Nämä ominaisvektorit (ja $\mathbf{0}$) muodostavat ominaisarvoon -1 liittyvän A:n *ominaissuoran* (jonka yhtälö siis on $3y = 5x$)

Vastaavasti arvolla $\lambda = \lambda_2 = 3$ saadaan ominaissuoran yhtälö $y = 2x$ ja ominaisvektorit $t\mathbf{b}_2 = (t,2t)$, $t \neq 0$, missä siis oli valittu $\mathbf{b}_2 = (1,2)$.

2. Olkoon B kuten yllä. B:n ainoa ominaisarvo on 2. Ominaisvektorit:

$$\text{Yhtälöryhmä } \begin{cases} 2x + y = 2x, \\ 2y = 2y \end{cases} \quad \text{on yhtäpitävä yhtälön } y = 0 \text{ kanssa (x:lle ei eh-$$

toa), joka on x-akselin yhtälö, ts. ominaisvektorit ovat $t\mathbf{i} = (t,0)$, $t \neq 0$.

(Lihava 'i' tarkoittaa kantavektoria (1,0) tai (1,0,0) jne. tilanteen mukaan, laiha 'i' puolestaan on imaginaariyksikkö.)

3. Olkoon C kuten yllä. C :llä ei ole reaalisia ominaisarvoja eikä siis myöskään reaalisia ominaisvektoreita (ihan samalla tavalla kuin edellä saadaan kyllä ominaisarvoihin $2 \pm i$ liittyvät kompleksiset ominaisvektorit $(1, \pm i)$). //

Faktoja (ei todisteta, osa kyllä helppoja): 1. Jos A on $n \times n$ -matriisi, niin A :n karakteristinen polynomi on jokin n :nnen asteen polynomi, jossa korkeimman potenssin λ^n kerroin on ± 1 (-1 , jos n on pariton). Joka tapauksessa juuria (ominaisarvoja) on korkeintaan n kpl.

2. Itse asiassa ominaisarvoja on aina tasan n kpl, jos lukumäärä lasketaan siten, että kompleksijuuret lasketaan mukaan ja juurien mahdollinen moninkertaisuus huomioidaan, ts. k -kertainen juuri lasketaan k juureksi (vrt. matriisi B yllä).

3. Mahdolliset kompleksiset ominaisarvot esiintyvät aina konjugaattipareina, ts. jos luku $a + ib$ (a, b reaalisia) on ominaisarvo, niin sen kompleksikonjugaatti $a - ib$ on myös ominaisarvo. Tämä seuraa siitä, että karakteristinen polynomi on reaalikertoiminen (koska tarkastellaan vain reaalisia matriiseja).

4. Yksinkertaiseen reaaliseen ominaisarvoon liittyy aina ominaisuora eikä muita ominaisvektoreita; k -kertaisen, $k > 1$, ominaisarvon kohdalla tilanne on mutkikkaampi:

Jos esim. $\lambda \in \mathbf{R}$ on matriisin A 2-kertainen ominaisarvo, on mahdollista että löydetään 2 ei-yhdensuuntaista (siis lineaarisesti riippumatonta) λ :aan liittyvää ominaisvektoria, sanokaamme $\mathbf{u}_1$ ja $\mathbf{u}_2$. Tällöin kaikki näiden lineaarikombinaatiot $\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2$ toteuttavat $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ (helppo todeta), ts. ovat λ :aan liittyviä ominaisvektoreita (paitsi $\mathbf{0}$). Näiden muodostamaa tasoa voidaan kutsua ominaisarvoon λ liittyväksi *ominaistasoksi*, yleisemmin puhutaan *ominaisaliavaruudesta*. (On myös mahdollista että 2 lineaarisesti riippumatonta ei ole; yllä matriisin B kohdalla kävi näin.)

Yleisesti: Jos λ on k -kertainen reaalinen ominaisarvo, voidaan löytää korkeintaan k kpl lineaarisesti riippumattomia ominaisarvoon λ liittyviä ominaisvektoreita (tietysti vähintään yksi).

5. *Eri* ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat aina lineaarisesti riippumattomia. Täsmällisemmin: jos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ovat p kpl $n \times n$ -matriisin A erisuuria ominaisarvoja, ja $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p$ ovat vastaavasti niihin liittyviä ominaisvektoreita, niin vektorijono $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p$ on lineaarisesti riippumaton.

Esim (liittyy erityisesti faktoihin 4. ja 5.): Olkoon $E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Matriisin E karakteristinen yhtälö on $\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$ eli

$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow$ ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 0$ ja $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (eli 1 on 2-kertainen ominaisarvo; tämä nähdään selkeästi kirjoittamalla karakteristinen polynomi muotoon $-\lambda(1-\lambda)^2$).

Ominaisvektorit:

$$\lambda_1 = 0: \text{Yhtälöryhmä } \begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \text{ on yhtäpitävä yhtälöiden } x = y = z$$

kanssa. Nähdään että ominaisarvoon 0 liittyvä ominaissuora on vektorin (1,1,1) suuntainen.

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1: \text{Nyt yhtälö } E\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \ (\lambda = 1) \text{ eli yhtälöryhmä } \begin{cases} 3x - y - 2z = x \\ 2x - 2z = y \\ 2x - y - z = z \end{cases}$$

on yhtäpitävä yhtälön $2x - y - 2z = 0$ kanssa. Tämä on siis ominaisarvoon 1 liittyvän ominaistason yhtälö. Tasosta voidaan valita 2 lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoria, esim. (1,2,0) ja (1,0,1).

Fakta 5 sanoo tästä tilanteesta, että ominaisvektoriparit (1,1,1), (1,2,0) ja (1,1,1), (1,0,1) ovat lineaarisesti riippumattomia vektorijonoja. Itse asiassa on voimassa vahvempi väite: näiden kaikkien kolmen muodostama jono on lineaarisesti riippumaton. //

Mikä merkitys ominaisarvoilla ja ominaisvektoreilla on?

Tarkastellaan esimerkkinä 3x3-matriisia. Olkoon siis A 3x3-matriisi, jonka ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$ (lukuarvoilla ei tässä ole merkitystä) ja näihin liittyvät ominaisvektorit vastaavassa järjestyksessä ovat avaruuden standardikantavektorit $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ ja $\mathbf{k} = (0,0,1)$. Tällöin siis ovat voimassa yhtälöt $A\mathbf{i} = \mathbf{i}$, $A\mathbf{j} = -2\mathbf{j}$ ja $A\mathbf{k} = 3\mathbf{k}$, joista helposti seuraa, että A ei voi olla mikään muu kuin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

A on siis rakenteeltaan mahdollisimman yksinkertainen matriisi, nimittäin *diagonaalimatriisi*, mikä on seurausta siitä, että kantavektorit ovat A:n ominaisvektoreita (myös käänteinen väite on ilmeinen: jos A on diagonaalimatriisi, niin kantavektorit ovat A:n ominaisvektoreita).

Esimerkkejä siitä, että diagonaalimatriiseilla matriisioperaatiot ovat tavallista yksinkertaisempia:

1. determinantin laskeminen $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -6$

$$\text{2. käänteismatriisi } A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(jos joku $\lambda_i = 0$, niin A^{-1} ei ole olemassa)

3. vektorin kertominen matriisilla esim.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2y \\ 3z \end{pmatrix}$$

4. matriisikertolasku esim.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -2b & 0 \\ 0 & 0 & 3c \end{pmatrix} . //$$

Annetun neliömatriisin A (joka siis yleensä ei ole diagonaalimatriisi) ominaisarvojen ja -vektorien etsimisen äärimmäinen tavoite on A :n *diagonalisointi*, mikä tarkoittaa A :n muuntamista sopivan kääntyvän matriisin B avulla diagonaalimatriisiksi siinä mielessä, että

$$B^{-1}AB = \text{diagonaalimatriisi}.$$

Tämä ei ole mahdollista kaikille neliömatriiseille, mutta joka tapauksessa ominaisarvoista voidaan päätellä A :n ominaisuuksia. Esim. kaikille neliömatriiseille A pätee, että A on ei-kääntyvä (eli $\det A = 0$) jos ja vain jos 0 on A :n ominaisarvo (vrt. edelliset esimerkit 1. ja 2.).

Diagonalisointi

Pari havaintoa matriisikertolaskusta yleensä:

1. Olkoot A ja B sellaiset matriisit, että tulo AB on määritelty. Tällöin lauseke AB muodostuu siten, että jokainen B :n sarake erikseen tulee kerrotuksi A :lla.

Jos esim. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, jolloin B :n sarakkeet

ovat $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ..., $\mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, niin matriisin $AB = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 18 & -10 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \\ 2 & 18 & -22 & 12 \end{pmatrix}$

sarakkeet ovat $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_4$. Siis voidaan kirjoittaa

$$B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4) \Rightarrow AB = (A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ A\mathbf{b}_3 \ A\mathbf{b}_4)$$

2. Olkoon B mielivaltainen matriisi ja D diagonaalimatriisi s.e. tulo BD on määritelty. Tällöin BD muodostuu siten, että kukin B :n sarake tulee kerrotuksi vastaavalla D :n diagonaali-alkiolla, ts. $\mathbf{b}_1$ kerrotaan alkiolla d_{11} , $\mathbf{b}_2$ kerrotaan alkiolla d_{22} jne. Jos esim. B on sama kuin yllä ja D on diagonaalimatriisi, jonka diagonaali on $(d_{11}, \dots, d_{44}) = (6, -1, 0, 2)$, niin

$$BD = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} . //$$

Olkoon nyt A $n \times n$ -matriisi, ja olkoot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ A :n ominaisarvoja sekä $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ vastaavasti näihin liittyviä ominaisvektoreita.

Nyt ovat siis voimassa yhtälöt $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1\lambda_1$, ..., $A\mathbf{b}_k = \mathbf{b}_k\lambda_k$ (missä $\mathbf{b}\lambda$ tarkoittaa täsmälleen samaa kuin $\lambda\mathbf{b}$; on samantekevää kummalle puolelle skalarikerroin kirjoitetaan). Jos muodostetaan - samaan tapaan kuin äskeissä 'havainnoissa' - vektoreista $\mathbf{b}_i$ matriisi $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_k)$ ja lisäksi ominaisarvoista λ_i diagonaalimatriisi

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix},$$

voidaan siis yhtälöt $A\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i\lambda_i$ niputtaa yhdeksi matriisiyhtälöksi

$AB = B\Lambda$

(λ = lambda, Λ = iso lambda (kreikk.)).

Esim.: Olkoon $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & -8 \\ -8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. A:n ominaisarvot ovat 3 ja -1 (joista -1

on 2-kertainen), ja esim. $\mathbf{b}_1 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 2, 1)$ ovat A:n ominaisvektoreita s.e. $A\mathbf{b}_1 = 3\mathbf{b}_1$ ja $A\mathbf{b}_2 = -\mathbf{b}_2$. Siis jos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{niin} \quad AB = B\Lambda. \quad //$$

Jos yhtälössä $AB = B\Lambda$ matriisi B on neliömatriisi ja lisäksi kääntyvä, A voidaan diagonalisoida. Kertomalla yhtälö puolittain vasemmalta matriisilla B^{-1} saadaan nimittäin $B^{-1}AB = \Lambda$. Täsmällisesti:

Määritelmä: Neliömatriisi A on *diagonalisoituva*, jos on olemassa kääntyvä matriisi B ja diagonaalimatriisi Λ s.e. $B^{-1}AB = \Lambda$.

(Huom: Kun B on neliömatriisi, niin B on kääntyvä $\Leftrightarrow \det B \neq 0 \Leftrightarrow$ B:n sarakkeet (tai yhtäpitävästi rivit) ovat lineaarisesti riippumattomat.)

Huomautuksia: 1. Jos yhtälössä $B^{-1}AB = \Lambda$ matriisin A dimensio on nxn, niin myös B ja Λ ovat joka tapauksessa nxn-matriiseja (riippumatta siitä, miten B ja Λ on muodostettu, onko Λ diagonaalinen jne.); muuten dimensiot eivät ole yhteensopivia.

2. Edeltävät tarkastelut osoittavat, että jos $B^{-1}AB = \Lambda$, missä Λ on diagonaalimatriisi, niin B ja Λ ovat välttämättä A:n ominaisvektoreista ja -arvoista yllä kuvatulla tavalla muodostetut. Matriisit B ja Λ eivät kuitenkaan ole yksikäsitteiset: ominaisarvojen järjestystä matriisissa Λ voidaan muuttaa, kunhan B:n sarakkeiden järjestys muutetaan vastaavasti; B:n sarakkeita voidaan skaalata mielivaltaisilla kertoimilla (kuitenkin $\neq 0$) jne. //

Yllä kerrotun nojalla on voimassa

Lause: $n \times n$ -matriisi A on diagonalisoituva jos ja vain jos A :lla on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. //

Tarkemmin sanoen välttämätöntä ja riittävää, jotta A olisi diagonalisoituva, on, että

1. A :n ominaisarvot ovat reaaliset, ja
2. jokaista A :n k -kertaista ominaisarvoa λ kohti on olemassa k lineaarisesti riippumatonta λ :aan liittyvää ominaisvektoria. //

Selvin tapaus:

Lause: Jos $n \times n$ -matriisin A ominaisarvot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ovat reaaliset ja erisuuret (siis ei moninkertaisia ominaisarvoja), niin A on diagonalisoituva (ks. fakta 5. sivulla 3). //

Esimerkkejä: 1. Sivujen 3-4 esimerkin matriisi E on diagonalisoituva: jos

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ niin } B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sivun 6 esimerkin matriisi A on myös diagonalisoituva: jos matriisiin B lisätään kolmanneksi sarakkeeksi esim. $\mathbf{b}_3 = (1, 0, 1)$, saadaan matriisi, joka diagonalisoi A :n.

3. Matriisi $H = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ei ole diagonalisoituva, jos $b \neq 0$. Tässä a on 2-

kertainen (tai 3-kertainen, jos $c = a$) ominaisarvo, johon ei liity riittävästi lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita. Sivulla 2 tarkasteltu matriisi B on esimerkki samasta ilmiöstä (ks. kirjoista tai wepistä esim. hakusanalla 'Jordan canonical form' tai 'Jordan block').

Sovellus: Olkoon A neliömatriisi. Tehtävänä on laskea $A^k = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ (k kpl). Jos A on diagonalisoituva, voidaan menetellä seuraavasti:

Yhtälö $B^{-1}AB = \Lambda$ voidaan kirjoittaa myös $A = B\Lambda B^{-1}$. Tällöin

$$A^k = (B\Lambda B^{-1})^k = B\Lambda B^{-1}B\Lambda B^{-1} \dots B\Lambda B^{-1} \quad (k \text{ kpl}).$$

Koska $B^{-1}B = I$, niin B :t ja B^{-1} :t supistuvat (paitsi ensimmäinen ja viimeinen) $\Rightarrow$ saadaan $A^k = B\Lambda^k B^{-1}$.

Koska Λ on diagonaalimatriisi, Λ^k on helppo muodostaa: selvästi Λ^k on diagonaalimatriisi, jonka diagonaalilla ovat $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$. Ja siis, kuten jo todettiin, nyt voidaan laskea $A^k = B\Lambda^k B^{-1}$. //

Esim: Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Tällöin $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ja $\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ovat sitä mitä pitääkin (tämän todistamiseksi riittää verifioida $AB = B\Lambda$).
Halutaan laskea A^5 . Tarvitaan B^{-1} , joka on

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Nyt } \Lambda^5 = \begin{pmatrix} (-2)^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix},$$

joten saadaan

$$A^5 = B\Lambda^5 B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -32 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \dots$$

$$\dots = \begin{pmatrix} 464 & -528 & 528 \\ 496 & -560 & 528 \\ 1056 & -1056 & 1024 \end{pmatrix}.$$

(Siis: muunnetaan A diagonaaliseksi $\rightarrow$ korotetaan potenssiin $\rightarrow$ muunnetaan takaisin) //

Toinen esim: Sivuilla 3-4 ja 7 esiintyy matriisi E , jonka ominaisarvot ovat 0 ja 1. Koska pätee sekä $0^k = 0$ että $1^k = 1$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$, pätee selvästi $\Lambda^k = \Lambda$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$, mistä edelleen seuraa $E^k = E$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$.

Kannattaa vakuuttua tästä laskemalla E^2 ja toteamalla että se on sama kuin E (muut potenssit ovat sitten automaattisesti samoja).

Huom. että E :n ominaisuus $E^k = E$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$ ei seuraa vielä siitä, että E :llä ei ole muita ominaisarvoja kuin 0 ja 1, vaan lisäksi on oleellista, että E on diagonalisoituva. //

Symmetriset matriisit ja 2. asteen käyrät

Neliömatriisi A on tunnetusti *symmetrinen*, jos $A^T = A$, ts. jos A :n i :nnellä rivillä ovat samat luvut samassa järjestyksessä kuin A :n i :nnessä sarakkeessa ja tämä kaikki vielä jokaisella i .

Symmetrisillä matriiseilla on seuraava tärkeä ominaisuus:

Lause: Symmetrinen matriisi on diagonalisoituva. // (ei todisteta)

Erityisesti symmetrisillä matriiseilla on siis sivun 7 alussa mainitut ominaisuudet.

Lisäksi:

Lause: Olkoon A on symmetrinen neliömatriisi. Jos λ_i, λ_j ovat kaksi A :n eri ominaisarvoa, ja $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j$ ovat vastaavasti näihin liittyviä ominaisvektoreita, niin $\mathbf{b}_i$ ja $\mathbf{b}_j$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa (eli $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0$). // (ei todisteta)

Seuraus: Jos A on symmetrinen neliömatriisi, niin A :n diagonalisoiva matriisi $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n)$ voidaan muodostaa s.e. sen sarakkeet ovat toisiaan vastaan kohtisuoria yksikkövektoreita, ts. toteuttavat $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i = 1$ kaikilla i ja $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0$, kun $i \neq j$. (Koska eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat edellisen lauseen nojalla kohtisuorassa, ja kuhunkin moninkertaiseen omi-

naisarvoon liittyvät ominaisvektorit voidaan aina valita kohtisuoriksi.) Tällöin jono $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ on $\mathbf{R}^n$:n *ortonormaali* kanta ja B on *ortogonaalinen* matriisi. Ortogonaalisen matriisin käänteismatriisi on helposti muodostettavissa: yllämainitut sarakkeiden pistetulot merkitsevät, että $B^T B = I$ ts. B :n käänteismatriisi on B^T (tämä on ortogonaalisen matriisin tavanomainen määritelmä).

Tarkastellaan 2. asteen tasokäyriä: Yleinen 2 muuttujan 2. asteen polynomi on muotoa

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r,$$

missä oletetaan, että ainakin yksi luvuista a, b, c on $\neq 0$ (muuten polynomi ei ole 2. astetta). Tällöin yhtälön $f(x,y) = 0$ ratkaisujoukko, ts. niiden pisteiden $\mathbf{x} = (x,y) \in \mathbf{R}^2$ joukko, joiden koordinaatit toteuttavat yhtälön, on 2. asteen *tasokäyrä*: ellipsi (erikoistapauksena ympyrä), hyperbeli tai parabeli.

Huom: Käyrä voi olla surkastunut; esim. yhtälön $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ratkaisujoukko on selvästi tyhjä, yhtälöllä $x^2 + y^2 = 0$ on ainoana ratkaisuna origo, yhtälön $x^2 - y^2 = 0$ ratkaisuna ovat suorat $y = \pm x$, jne.

Perusasiat 2. asteen käyristä: Adams (5. laitos) P.3 ja 8.1.

Yhtälö $f(\mathbf{x}) = f(x,y) = 0$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{p}^T \mathbf{x} + r = 0,$$

$$\text{missä } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Koska A on symmetrinen, se voidaan diagonalisoida: $B^{-1}AB = \Lambda$, missä lisäksi voidaan olettaa että $B^{-1} = B^T$ (ks. sivun 8 loppu).

Jos $\mathbf{x} = (x,y)$ on jokin tason piste, niin $\mathbf{x}$ voidaan esittää B :n sarakkeiden lineaarikombinaationa:

$$\mathbf{x} = u\mathbf{b}_1 + v\mathbf{b}_2.$$

Merkitään $\mathbf{u}$:lla vektoria joka sisältää kantavektorien $\mathbf{b}_i$ kertoimet $\mathbf{x}$:n lausekkeessa, ts. $\mathbf{u} = (u,v)$.

(Siis u,v ovat $\mathbf{x}$:n koordinaatit kantaan $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ liittyvässä koordinaatistossa aivan kuten x,y ovat $\mathbf{x}$:n koordinaatit standardikantaan $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ liittyvässä koordinaatistossa; yo. lauseke vastaa $\mathbf{x}$:n esitystä muodossa $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.)

Koordinaattiesitysten välillä vallitsee yhteys $\mathbf{x} = B\mathbf{u}$ (kirjoittamalla lausekkeet auki nähdään välittömästi, että $u\mathbf{b}_1 + v\mathbf{b}_2$ ja $B\mathbf{u}$ ovat sama vektori). Kun tämä sijoitetaan lausekkeeseen $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ saadaan

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{u}^T B^T A B \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \Lambda \mathbf{u} = (u \ v) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$$

Nähdään, että käyrän $f(x,y) = 0$ tyyppi (ellipsi, hyperbeli, parabeli) on suoraan pääteltävissä A :n ominaisarvoista:

Esimerkkejä: 1. Tarkastellaan yhtälön $x^2 + 3xy + 4y^2 = 10$ määrittelemää käyriä. Tässä siis $p = q = 0$ eli 1. asteen termejä ei ole (tehdään tämä

rajoitus 1-kertaisuuden vuoksi). Tällöin, jos käyrä on ellipsi tai hyperbeli (siis keskipisteellinen), sen keskipiste on origossa. Matriisi A on nyt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & 4 \end{pmatrix}, \text{ jonka ominaisarvot ovat } \lambda_1 = 0.3787 \text{ ja } \lambda_2 = 4.6213 \text{ ja}$$

ominaisvektorit vastaavasti $\mathbf{b}_1 = (0.9239, -0.3827)$, $\mathbf{b}_2 = (0.3827, 0.9239)$. Ominaisvektorit $\mathbf{b}_1$ ja $\mathbf{b}_2$ ovat automaattisesti kohtisuorassa, koska A on symmetrinen; tässä ne on valittu lisäksi yksikkövektoreiksi. Silloin niistä muodostettu matriisi B on ortogonaalinen. Alkuperäinen käyrän yhtälö $x^2 + 3xy + 4y^2 = 10$ saa kantaan $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ liittyvissä koordinaateissa u, v muodon

$$0.3787 u^2 + 4.6213 v^2 = 10.$$

Tämä on selvästi ellipsin yhtälö ja helposti kirjoitettavissa perusmuotoon

$$\frac{u^2}{\alpha^2} + \frac{v^2}{\beta^2} = 1, \text{ josta puoliakselien pituudet ja eksentrisyys ovat laskettavissa.}$$

Pääakselit ovat ominaisvektorien $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ suuntaiset. Että yhtälö todella esittää ellipsiä eikä jotain surkastunutta muotoa on selvää, koska oikea puoli $= 10 > 0$. Huom. että käyrä tiedetään ellipsiksi heti siitä, että A :n ominaisarvot ovat positiiviset (yleisemmin samanmerkkiset).

2. Yhtälö $x^2 + 5xy + 4y^2 = 10$: Nyt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix}$. Laskematta ominaisarvoja ne voidaan todeta erimerkkisiksi siitä, että $\det A = -2.25 < 0$, koska

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2. \text{ Tällöin käyrä on hyperbeli (perusmuoto } \frac{u^2}{\alpha^2} - \frac{v^2}{\beta^2} = 1).$$

Pääakselien löytäminen yms. tietysti edellyttää, että A :n ominaisarvot ja -vektorit todella määritetään.

3. Yhtälö $x^2 + 4xy + 4y^2 = 10$: Nyt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ja $\det A = 0$. Tällöin toinen

ominaisarvo on $= 0$ (vain toinen, sillä jos 2×2 -matriisilla on $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, niin matriisi on välttämättä 0 -matriisi). Jos yhtälössä olisi sopivasti nollasta poikkeavia 1. asteen termejä, se esittäisi parabelia. Tässä tapauksessa parabeli on surkastunut kahden suoran yhdisteeksi, mikä nähdään suoraan kirjoittamalla yhtälö muotoon $(x + 2y)^2 = 10$. //

Siis: 2. asteen käyrän tyyppi nähdään suoraan matriisin A ominaisarvoista; vastaava tulos on voimassa korkeammassa dimensioissa, ts. jos muuttujia on enemmän kuin 2 (silloin kysymys ei ole käyrästä vaan 2. asteen pinnoista jne.). Jos muuttujia on vain 2, tyyppi määräytyy jo $\det A$:n perusteella.