



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 11

Harjoitukset viikolla 49, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

Tiistaina 6.12. eli itsenäisyyspäivänä ei pidetä laskuharjoituksia. Tiistain laskuharjoitukset

korvaava tilaisuus järjestetään **maanantaina 5.12. A-salissa kello 13.15-14.45**. Kaikki halukkaat ovat tervetulleita sinne!

- 1) (**kt**) (a) Etsi seuraavien funktioiden pienin positiivinen jakso p .

$$\cos(nx), \sin(nx), \cos\left(\frac{2\pi x}{k}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{k}\right), \cos\left(\frac{2\pi nx}{k}\right), \sin\left(\frac{2\pi nx}{k}\right)$$

- (b) Olkoon $f(x)$ muuttujan x suhteen p -jaksollinen. Näytä, että $f(ax)$, $a \neq 0$, on muuttujan x suhteen p/a -jaksollinen, ja että $f(x/b)$, $b \neq 0$, on muuttujan x suhteen bp -jaksollinen. Tarkasta nämä tulokset, kun $f(x) = \cos(x)$ ja $a = b = 2$.

- 2) (**kt**) Etsi 2π -jaksollisen funktion $f(x) = x + |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ Fourier-sarja ja piirrä kyseisen sarjan kolmen ensimmäisen osasumman kuvaajat.

- 3) (**kt**) Etsi 2π -jaksollisen funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi^2/4 & \text{kun } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$$

Fourier-sarja ja piirrä kyseisen sarjan kolmen ensimmäisen osasumman kuvaajat.

- 4) (**ht**) Laske parilliset ja parittomat osat ja hahmottele ne

$$\text{a) } x + |x| \quad \text{b) } e^x \quad \text{c) } x \cos x$$

- 5) (**ht**) Laske 2π -jaksolliseksi oletetun funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{jos } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

Fourier-sarja ja piirrä sarjan kolme ensimmäistä osasummaa.

Mikä on funktion f pariton ja mikä parillinen osa? Mitkä ovat Fourierin sini- ja kosinikehitelmät?

- 6) (ht) Etsi $2L = 2$ -jaksollisen funktion $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [-1, 1]$ Fourier-sarja ja piirrä kyseisen sarjan kolmen ensimmäisen osasumman kuvaajat.

- 7) (ht) Onko funktio

$$f(x) \begin{cases} -2x, & \text{kun } -\pi < x < 0 \\ 2x & \text{kun } 0 < x < \pi \end{cases}$$

parillinen vai pariton? Laske Fourier-sarja. Hahmottele funktion kuvaaja ja joitakin Fourier-sarjan osasummia.

- 8) (ht) Käytä avuksesi funktion $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $-\pi < x < \pi$, Fourier-sarjaa ja näytä, että $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$.

- 9) (ht) Näytä Parsevalin kaavan avulla, että $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)^6 dx = \frac{5\pi}{8}$.

1.

π -JAKSOLLINEN FUNKTIO, $f(x)$

TOTEUTAA $f(x + \pi) = f(x)$ KAIKILLA x (MÄÄRITELMÄ), NÄIN OLLEN

$$f(2x) = f(2x + \pi) = f(2(x + \frac{\pi}{2}))$$

MINKE PERUSTEELLA $f(2x)$ ON

$\pi/2$ -JAKSOLLINEN.

a) KOSKA $\cos x$ JA $\sin x$ OVAT

2π -JAKSOOLLISIA, ON

$\cos(mx)$ $\frac{2\pi}{m}$ -JAKSOLLINEN

$\sin(mx)$ $\frac{2\pi}{m}$ -JAKSOLLINEN

$\cos(\frac{2\pi}{k}x)$ k -JAKSOLLINEN

$\sin(\frac{2\pi}{k}x)$ k -JAKSOLLINEN

$\cos(\frac{2\pi m}{k}x)$ $\frac{k}{m}$ -JAKSOLLINEN

$\sin(\frac{2\pi m}{k}x)$ $\frac{k}{m}$ -JAKSOLLINEN

b) YLLÄ OLEVASTA PERUSTEELUSTA

SAAPAA SUORAAN b)-KOHDAN

VASTAUS VASTAVALLO TAVALLA KUIN

a)-KOHDESSA

[2.]

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + |x|) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \cos mx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \frac{1}{m} 2x \sin mx - \int_0^{\pi} \frac{1}{m} 2 \sin mx dx \right]$$

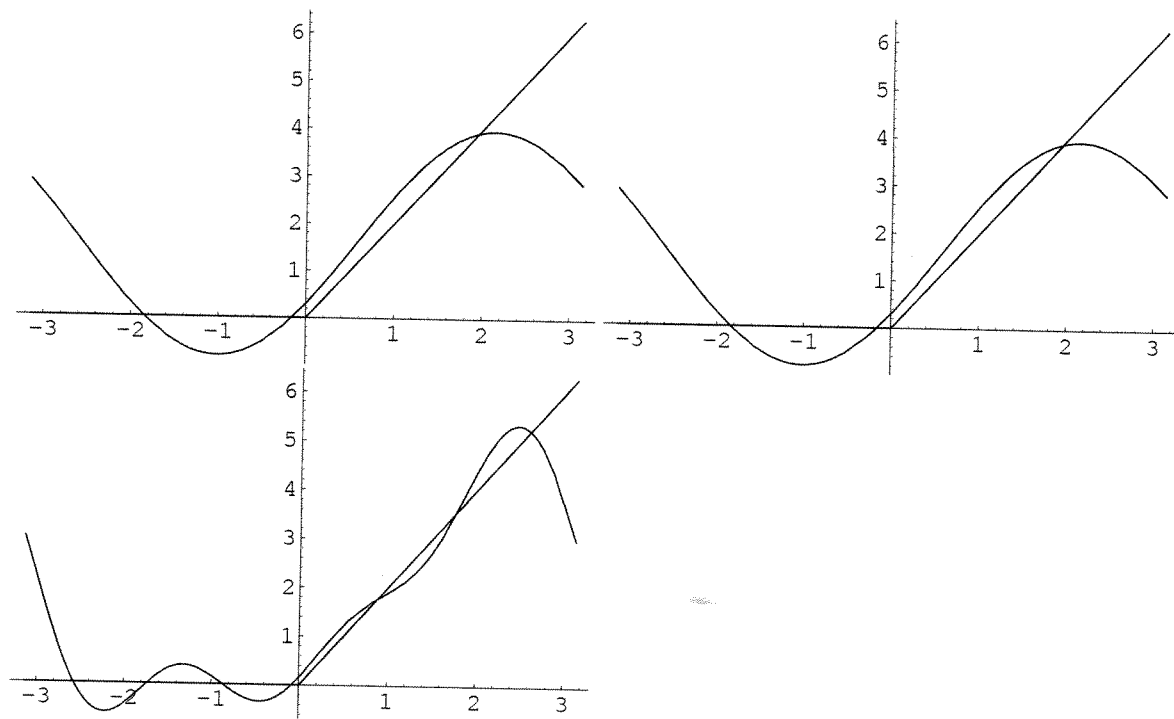
$$= \frac{2(-1 + \cos(m\pi) + m\pi \sin(m\pi))}{\pi m^2}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \sin mx dx$$

$$= 0 \text{ s. INTEGRAL} = \frac{-2m\pi \cos m\pi + 2\sin m\pi}{m^2 \pi}$$

MERKATAN :

$$S_N = a_0 + \sum_{m=1}^N (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$



Kuva 1: (KT2) Osasummat S_1 (vasemmalla ylhäällä), S_2 (oikealla ylhäällä) ja S_3 (vasemmalla alhaalla).

FUNKTIO ON PARILLINEN ELI $f(x) = f(-x)$
 JOULLOIN SARJAN JÄÄ VAIN KOSINI-
 TERMEJÄ ($b_n = 0$)

3.1

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{6} \pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(nx) dx$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} \cos(n\pi) dx$$

TÄHÄN VALIIN

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(nx) dx = \left[\frac{1}{n} x^2 \sin(nx) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

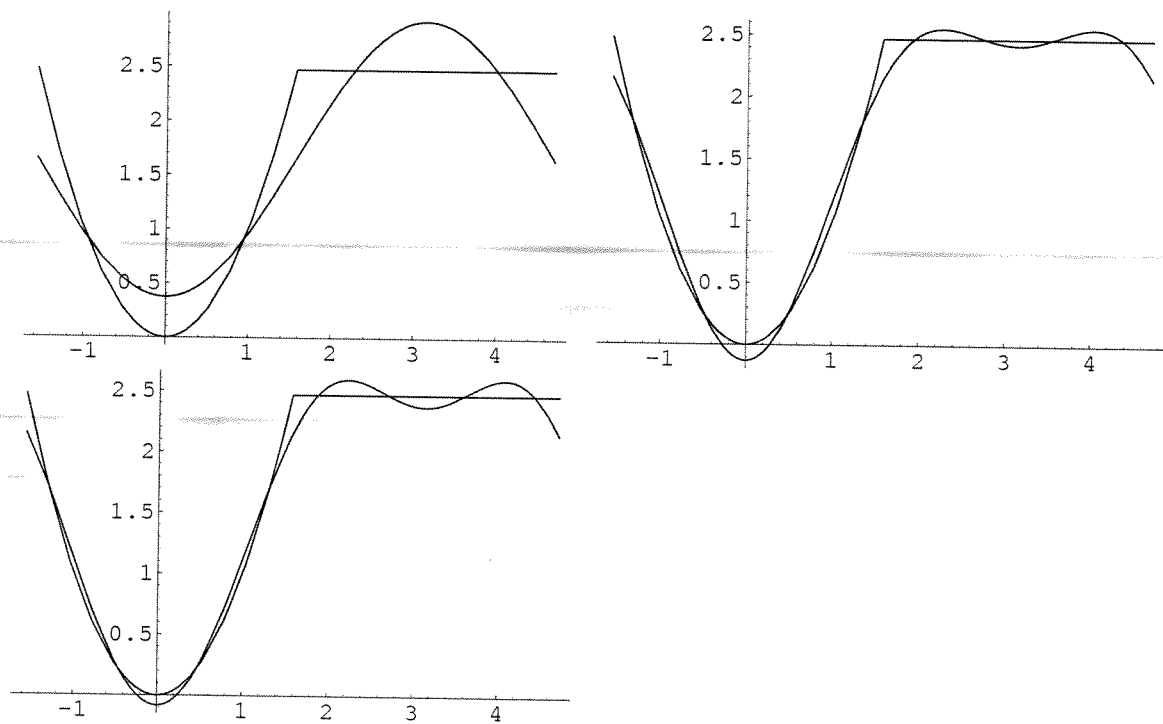
$$- \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{n} x \sin(nx) dx = \frac{\pi^2}{2n} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \left[\frac{2}{n^2} x \cos(nx) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$- \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{n^2} \cos(nx) dx$$

$$= \frac{4n\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (-8 + n^2 \pi^2) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n^3}$$

MISTÄ

$$a_n = \frac{-8 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) (4 + n\pi \sin(n\pi))}{2n^3 \pi}$$



Kuva 1: (KT3) Osasummat S_1 (vasemmalla ylhäällä), S_2 (oikealla ylhäällä) ja S_3 (vasemmalla alhaalla). S_2 ja S_3 ovat samoja, koska funktio on parillinen.