Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3 — Harjoitus 10

Harjoitukset viikolla 48, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

1) (kt) a) Laske integraali $\oint_C e^z/z\,dz$, missä C muodostuu ympyröiden $|z| = 2$ (vastapäivään) ja $|z| = 1$ (myötäpäivään) kehistä.

b) Laske $\oint_C (\cos(\pi z))/z^{2n}\,dz$, missä n on positiivinen kokonaisluku ja C on yksikköympyrän kehä vastapäivään kierrettynä.

2) (kt) Näytä, että geometrinen sarja hajaantuu yksikköympyrän kehän $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$ jokaisessa pisteessä, jossa θ on π:n rationaalinen moninkerta eli $\theta = p\pi/q$, missä p ja q ovat kokonaislukuja.

3) (kt) Laske 1-puolinen Z-muunnos jonoille a) $x_n = n$, b) $x_n = b^n n^2$ ja c) näytä yleisesti, että $Z[\{b^n x_n\}] = X(z/b)$, kun $X(z) = Z(\{x_n\})$.

4) (ht) Suppenevatko sarjat?

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n^2+i} \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

5) (ht) Mikä on sarjan $\sum_{n=0}^{\infty}(z+2-i)^n/(1+i)^n$ kehityspiste ja suppenemissäde?

6) (ht) Laske funktion $1/(1+z)^m$ MacLaurinin sarjan neljä ensimmäistä termiä binomikaavalla (Kreyszig s. 757).

7) (ht) Laske funktion $1/(z(z-1))$ Laurent-sarja origo kehityspisteenä ja anna suppenemisalue.

8) (ht) Integroi $\oint_C (\mathrm{Ln} z)/(z-2)^2\,dz$, missä C on ympyrän $|z-3| = 2$ kehä vastapäivään kierrettynä.

9) (ht) Osoita, että 1-puolinen Z-muunnos toteuttaa yhtälön

$$Z[\{n^k x_n\}] = (-1)^k \left(z\frac{d}{dz}\right)^k X(z)$$

3b)

$$z \frac{d}{dz}\left(\frac{-bz}{(z-b)^2}\right) = \underline{\underline{\frac{bz\cdot(z+b)}{(z-b)^3}}}$$

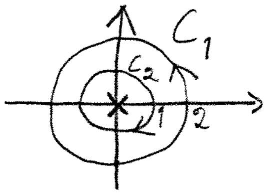
c) Oletus : $Z(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = X(z)$

Todistus $Z(\{b^n x_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n x_n z^{-n} =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(\frac{z}{b}\right)^{-n} \underset{=}{\overset{\text{oletus}}{=}} X\left(\frac{z}{b}\right) \quad \square$$

C3 Harjoitus 10

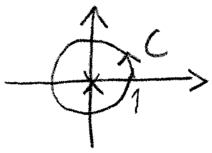
1. a)



CIK: $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$

$$\int_C \underbrace{\frac{e^z}{z}}_{\text{anal., kun } z\neq 0} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z}\,dz + \oint_{C_2}\frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i\cdot e^0 - 2\pi i\cdot e^0 = \underline{\underline{0}}$$

b) CIK: $\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\, f^{(n)}(z_0)$



$$\oint_C \underbrace{\frac{\cos \pi z}{z^{2n}}}_{\text{anal., kun } z\neq 0} dz = \frac{2\pi i}{(2n-1)!}(-1)^n\cdot \pi^{2n-1}\cdot \sin 0 = \underline{\underline{0}}$$

$f(z) = \cos \pi z \Rightarrow$

$f^{(2n-1)}(z) = (-1)^n\, \pi^{2n-1}\, \sin \pi z \Rightarrow$

$f^{(2n-1)}(0) = 0$

$(n = 1, 2, \ldots)$

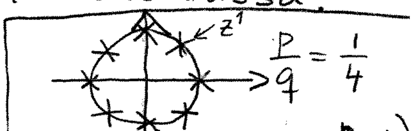
2.) Geometrinen sarja: $\sum_{m=0}^{\infty} z^m$ $\left(s_n = \sum_{m=0}^{n} z^m\right)$

Nyt $z = e^{i\theta} \Rightarrow z^m = e^{im\theta}$

ja $|z| = 1 \Rightarrow |z^m| = 1$

Sarja hajaantuu, koska $\lim_{n\to\infty} s_n$ ei ole olemassa.

Nythän aina $|s_{n+1} - s_n| = 1$. □



(θ-ehdosta seuraa mm., että löytyy mielivaltaisen suuri m, s.e. $z^m = 1$)

3.) a) $x_n = n \Rightarrow X(z) = \mathcal{Z}(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = z\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n-1} =$

$$z\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{d}{dz}\left(z^{-n}\right) = -z\cdot\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = -z\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) =$$

$$\underline{\underline{\frac{z}{(z-1)^2}}}$$

b) $x_n = b^n n^2 \Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n n^2 z^{-n} = -z\cdot\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} b^n n z^{-n} =$

$$-z\cdot\frac{d}{dz}(-z)\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^n = z\frac{d}{dz}z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{b}{z}}\right) = z\frac{d}{dz}z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-b}\right) =$$