



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 9

Harjoitukset viikolla 47, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

- 1) (**kt**) Etsi ylärajat seuraaville integraaleille ML -epäyhtälön avulla, kun C on jana pisteestä 0 pisteeseen $3 + 4i$.

ML -epäyhtälö: $|\int_C f(z) dz| \leq ML$, missä L on polun C pituus ja M on vakio siten, että $|f(z)| \leq M$ kaikissa polun C pisteissä z .

(a) $\int_C \ln(z+1) dz$

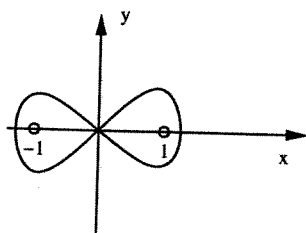
(b) $\int_C e^z dz$

- 2) (**kt**) Laske funktion $f(z) = (z^3 + \sin z)/(z-i)^3$ integraali yli kompleksitason neliön $\{z = x + iy : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$ reunakäyrän vastapäivään.

- 3) (**kt**) Laske seuraavat integraalit:

(a) $\oint_C \frac{dz}{z^2-1}$; C on kuvan käyrä.

(b) $\oint_C \frac{dz}{1+z^3}$; C on $|z+1|=1$ vastapäivään.



- 4) (**ht**) (a) Tarkista, että Cauchyn lause pätee, kun integroidaan funktiota $z \mapsto z^2$ vastapäivään pisteiden $-1, 1, 1+i$ ja $-1+i$ virittämän suorakaiteen reunaa pitkin.
- (b) Millä kaikilla suljetuilla ja yksinkertaisilla poluilla C Cauchyn lauseesta seuraa, että

(i) $\oint_C \frac{dz}{z} = 0,$

(ii) $\oint_C \frac{\cos z}{z^6 - z^2} dz = 0$ ja

(iii) $\oint_C \frac{\exp(1/z)}{z^2 + 9} dz = 0?$

5) (ht) (a) Integroi $f(z) = 1/z$ vastapäivään yksikköympyrän yli. Voidaanko Cauchyn lausetta soveltaa?

(b) Laske integraali $\oint_C \frac{\sin z}{z+3i} dz$, kun C on $|z - 2 + 3i| = 1$ vastapäivään kierrettynä.

6) (ht) Integroi $f(z)$ vastapäivään yksikköympyrän yli. Voidaanko Cauchyn lausetta soveltaa?

(a) $f(z) = |z|$

(b) $f(z) = \bar{z}$

7) (ht) Määritellään sinin käänteisfunktio $w = \sin^{-1} z$ relaatiosta $\sin w = z$. Käytä hyväksesi määritelmää $\sin w = (e^{iw} - e^{-iw})/2i$ ja näytä, että

(a) $\sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2}).$

(b) Onko $\sin^{-1}$ yksi- vai moniarvoinen funktio?

8) (ht) Näytä, että $\oint_C (z - z_1)^{-1} (z - z_2)^{-1} dz = 0$ jokaisella suljetulla ja yksinkertaisella polulla C , joka kiertää pisteet z_1 ja z_2 .

9) (ht) Laske jonon $\{1/(n+1)!\}_{n=0}^{\infty}$ Z-muunnos. Laske myös käänteismuunnos $X^{-1}(1/(1 - z^{-3}))$.

L -> harjoitus 9

$$① \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

$$C: \text{ janan } 0 \rightarrow 3+4i$$

$$L = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$a) \quad |Ln(z+1)| = \sqrt{(\ln|z+1|)^2 + (\arg(z+1))^2} \\ \leq \sqrt{(\ln\sqrt{32})^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2} =: M$$

$$\left| \int_C Ln(z+1) dz \right| \leq \overset{\text{maksimi janan pösteesteessä}}{\sqrt{(\ln\sqrt{32})^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}} \cdot 5$$

$$b) \quad |e^z| = |e^x| |e^{iy}| = e^x \leq e^3$$

$$\left| \int_C e^z dz \right| \leq e^3 \cdot 5$$

②

$$\oint_C \frac{z^3 + \sin z}{(z-i)^3} dz$$

$$z^3 + \sin z \text{ anal.} \Rightarrow$$

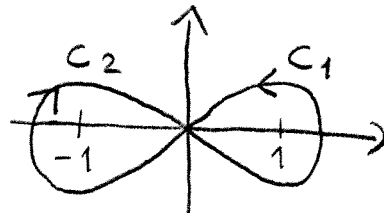
$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$\oint_C \frac{z^3 + \sin z}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left. \frac{d^2}{dz^2} \right|_{z=i} z^3 + \sin z$$

$$= \pi i (6i - \sin i) = \pi \sinh 1 - 6\pi$$

③

$$a) \quad \oint_C \frac{1}{z^2-1} dz = \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} dz$$



$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\oint_{C_1} \frac{1}{z-1} dz}_{=0} + \underbrace{\oint_{C_2} \frac{1}{z-1} dz}_{=0} - \left(\underbrace{\oint_{C_1} \frac{1}{z+1} dz}_{=0} + \underbrace{\oint_{C_2} \frac{1}{z+1} dz}_{=0} \right) \right) \\ = \frac{1}{2} (2\pi i - (-2\pi i)) = \underline{2\pi i}$$

käytetty

$$2\pi i f(z_0) = \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

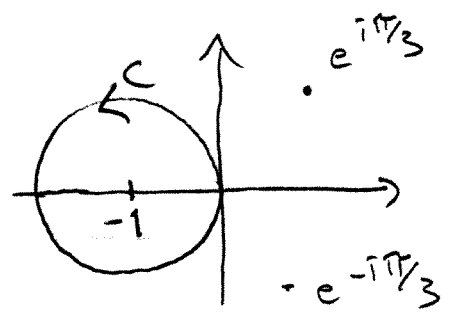
3. b) $\oint_C \frac{1}{z^3+1} dz$ $z^3+1=0 \Rightarrow z = (-1)^{1/3} = (e^{i(\pi+2\pi n)})^{1/3}$
 $= e^{i\pi/3 + \frac{2}{3}\pi n}$

$$= \oint_C \frac{[(z - e^{i\pi/3})(z - e^{-i\pi/3})]^{-1}}{z+1} dz$$

$$= 2\pi i \left[(-1 - e^{i\pi/3})(-1 - e^{-i\pi/3}) \right]^{-1}$$

$$= 2\pi i (1 + e^{-i\pi/3} + e^{i\pi/3} + e^0)^{-1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}\pi i}}$$



Polun sisälle jää vain yksi napa, jonka takia Cauchyn integroimis-
 kaavaa voitään käyttää sen suhteen.