



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 8

Harjoitukset viikolla 46, 2005. kt=kotitehtävä, ht=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuvuikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!

1) (kt) Laske logaritmin avulla kaikki arvot:

$$\text{a) } \sqrt[6]{-1} \quad \text{b) } (1 + 3i)^i \quad \text{c) } (-5)^{2-4i}$$

2) (kt) a) Etsi kuvauksen $w = \frac{-z-i}{-iz+1}$ käänteiskuvauks. Osoita, että w kuvaa suorat $x = c =$

vakio ympyröiksi, joiden keskipisteet sijaitsevat suoralla $v = 1$.

b) Etsi se Möbius-kuvauks, joka kuvaa z -tason yksikkökierokkeen w -tason yksikkökierokkeelle

ja pisteen $z = \frac{2}{i}$ origoon ($w = 0$). Piirrä myös suorien $x =$ vakio ja $y =$ vakio

kuvat tässä kuvauksessa.

3) (kt) a) Mikä on joukon $\{z : 2 \leq |z| \leq 3, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ kuva kuvauksessa $w = \ln z$?

b) Etsi se Möbius-kuvauks, joka kuvaa pisteet $0, i, -i$ pisteille $2i, \infty, i + 1/2$.

4) (ht) a) Miksi analyyttiset kuvaukset kuvaavat käyrät $|z| =$ vakio ja $\arg(z) =$ vakio aina

käyriksi, jotka leikkaavat suorassa kulmassa.

b) Missä pisteissä kuvauks $w = \cos(z^2 + 1)$ ei ole konforminen?

5) (ht) a) Osoita, että Möbius-kuvauksen käänteiskuvauks ja kahden Möbius-kuvauksen yhdiste

ovat Möbius-kuvauksia.

b) Etsi kuvauksen $w = \frac{3z+4i}{z+2i}$ käänteiskuvauks suoraa, käyttämättä kaavaa $z = \frac{dw+b}{cw-a}$.

6) (ht) Osoita, että edellisen tehtävän a)-kohdan kuvauksen kerroinmatriisit saat helposti ker-

tomalla ja kääntämällä kerroinmatriisit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

7) (ht) a) Olkoon $D = \{z : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$. Hahmottele funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}, w = f(z) = 1/z$,

kuvajoukko w -tasossa.

1. $z^c = e^{c \log z}$

$\log z = \ln|z| + i(\arg z + 2n\pi)$

(Missä kompleksista logaritminä merkitty: $\log z$)

a) $\sqrt[6]{-1} = (-1)^{\frac{1}{6}} = e^{\frac{1}{6} \cdot (\ln 1 + i(\pi + 2n\pi))} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}n\pi)} \quad (n=0, \dots, 5)$

Missä saadaan kuusi eri suurta arvoa yksikköympyrän kehälle.

b) $(1+3i)^i = e^{i \cdot (\ln \sqrt{10} + i(\arctan 3 + 2n\pi))} = e^{-(\arctan 3 + 2n\pi)}$

$n \in \mathbb{Z}$

c) $(-5)^{2-4i} = e^{(2-4i) \cdot (\ln 5 + i(\pi + 2n\pi))} = e^{2\ln 5 + 4\pi + 8n\pi}$

$n \in \mathbb{Z}$

2. a) $w = \frac{z-i}{-iz+1} \Rightarrow -wiz + w = z - i \Rightarrow z(wi+1) = w+i \Rightarrow$

$z = \frac{w+i}{wi+1}$

Suorien $X=C$ valkio kuva: $w(c+yi) =$

$\frac{c+yi-i}{1+y+ci} = \frac{c+yi-i}{1+y+ci} = \frac{c+yi-i}{1+y+ci} = \frac{c+yi-i}{1+y+ci}$

$(u-k)^2 + (v-1)^2 = \left(\frac{ac-k(1+y)^2 - kc^2}{(1+y)^2 + c^2} + \left(\frac{c^2+y^2-1-(1+y)^2 - c^2}{(1+y)^2 + c^2} \right)^2 \right)$

$= \frac{[-k \cdot (1+y)^2 + 2c - kc^2]^2 + 4(y+1)^2}{[(1+y)^2 + c^2]^2}$

nähdään, että
valitsemalla $k = \frac{1}{c}$

$$= \frac{(-\frac{1}{2}(1+y)^2 + c)^2 + 4(y+1)^2}{\frac{1}{c^2} [(1+y)^2 + c^2]^2} = \frac{1}{c^2} \frac{[(1+y)^2 + c^2]^2}{[(1+y)^2 + c^2]^2} = \frac{1}{c^2}$$

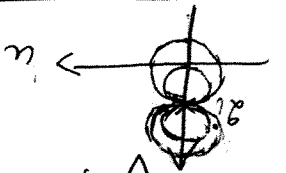
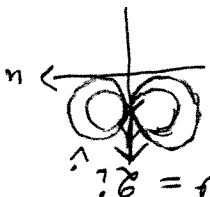
suorat $X=C$ kuvaturat ympäriksi, joiden k.p. on $(\frac{1}{2}, 1)$ ja säde $\frac{1}{2}$ □

b) Kre: $w = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}$ nyt $z_0 = \frac{i}{2} \Rightarrow$

$$w = \frac{z - \frac{i}{2}}{-\frac{i}{2}z - 1}$$

kuvat ympäriä, joiden keskipiste v-akselilla ja sivarat pistettä $w = \frac{i}{2}$

$X = \text{vakio} \rightarrow$



$w(\infty) = \frac{i}{2}$
 $w(i) = -i$
 $w(0) = \frac{i}{2}$
 $w(-i) = i$
 $\Rightarrow$ suorien $y = \text{vakio}$

3a) $R = \{z : 2 \leq |z| \leq 3, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\}$

$w = \log z = \ln |z| + i \arg z$

$2 \leq |z| \leq 3 \Rightarrow \ln 2 \leq \operatorname{Re} w \leq \ln 3$

$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Im} w \leq \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$

kuvajoukko: $\{w = u + vi : \ln 2 \leq u \leq \ln 3, \frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{3\pi}{4}\}$

b) $\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

$\Rightarrow \frac{w-\frac{i}{2}}{w-i} \cdot \frac{1-i}{1+i} = \frac{z-\frac{i}{2}}{z-i} \cdot \frac{1-i}{1+i} \Rightarrow (w-\frac{i}{2})(z-i) = (z-\frac{i}{2})(w-i)$

$\Rightarrow w = \frac{z \cdot (-2i+1+2i)-2}{z+2} = \frac{-z+2}{z+2}$