



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 7

Harjoitukset viikolla 45, 2005. **kt**=kohtehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kohtehtävät palautetaan oman ryhmän asistentille loppuvuikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muita laittaa kohtehtäväpaperiin **nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!**

- 1) **(kt)**
 - (a) Etsi funktion $f(z) = z^2 + 4z - 1$ reaali- ja imaginaariosat.
 - (b) Saakoon z arvonsa joukossa $R = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$. Etsi jnni se w -tason alue, jossa kuvauksen $w = \frac{z}{z+1}$ arvot ovat. Piirrä joukot.
 - (c) Derivoi $(2 + iz)^6$ pisteessä $2i$.
- 2) **(kt)**
 - (a) Derivoi $\frac{z+1}{z-i}$.
 - (b) Derivoi $\frac{z^2}{(z+1)^2}$.
 - (c) Osoita, että $f(z) = |z|^2$ on derivoituva ainoastaan pisteessä $z = 0$ ja siis f ei ole missään analyyttinen.
Vinkki: $|z + \Delta z|^2 = (z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z})$.
- 3) **(kt)**
 - (a) Etsi yhtälön $\cosh z = \frac{1}{2}$ kaikki ratkaisut.
 - (b) Millä kaikilla z
 - (i) $\cos(z)$
 - (ii) $\sin(z)$saa reaalisia arvoja?
- 4) **(ht)** Osoita derivoimalla, että $\Re \cos z$ ja $\Im \sin z$ ovat molemmat harmonisia.
- 5) **(ht)** Etsiä muodossa $u + iv$.
 - (a) $\cos(10i)$
 - (b) $\cos(\pi + \pi i)$
 - (c) $\cosh(-2 + 3i)$
- 6) **(ht)** (a) Luomustele joukon $\{z : |\arg z| \leq \frac{\pi}{8}\}$ kuva kuvauksessa $w = z^2$.

(b) Etsi ja piirrä alueen $\{z : \Im z > 0\}$ kuva kuvauksessa $w = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$.

7) **(ht)**

(a) Onko $v(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ harmoninen funktio? Jos näin on, etsi vastaava analyyttinen funktio $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

(b) Määritä a siten, että $u(x, y) = e^{2x} \cos(ay)$ on harmoninen ja etsi vastaava harmoninen konjugaatti.

(c) Kuin (b)-kohde funktiolle $u(x, y) = \sin(x) \cosh(ay)$.

8) **(ht)**

Näytä, että jos $f(z)$ on analyyttinen ja $\Re f(z)$ on vakio, niin $f(z)$ on vakio.

9) **(ht)**

Anna yhtälön $e^{z^2} = 1$ kaikki ratkaisut. Piirrä muuttama niistä kompleksitasoon.

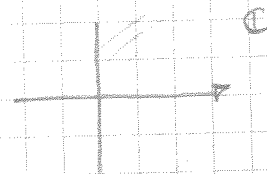
1 a) $f(z) = z^2 + 4z - 1$
 $f(x+iy) = x^2 + i2xy - y^2 + 4x + i4y - 1$
 $= \underbrace{x^2 - y^2 + 4x - 1}_{\operatorname{Re} f} + i \underbrace{(2xy + 4y)}_{\operatorname{Im} f}$

b) $R = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \}$
 $= \{ r e^{i\theta} : r > 0, \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \}$

$w = 1/z = 1/r e^{-i\theta}$, $z = r e^{i\theta}$

$\begin{cases} r > 0 \\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/r > 0 \\ -\theta \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases}$

Wir $w \in R \Leftrightarrow z \in R$



c) $D(z + iz)^6 \Big|_{z=2i} = 6(z + iz)^5 i \Big|_{z=2i} = 0$

2 a) $D \frac{z+i}{z-i} = \frac{1}{z-i} - \frac{z+i}{(z-i)^2} = \frac{-2i}{(z-i)^2}$

b) $D \frac{z^2}{(z+i)^2} = \frac{2z}{(z+i)^2} + \frac{(-2)z^2}{(z+i)^3}$
 $= \frac{2iz}{(z+i)^3}$

c) $f(z) = |z|^2 = z \bar{z}$

$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z \bar{z}}{\Delta z}$
 $= z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z}$

1° $z=0$
 $\Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow |\overline{\Delta z}| = |\Delta z| \rightarrow 0 \Rightarrow \overline{\Delta z} \rightarrow 0$
 $\Rightarrow Df(z) = \bar{z}$

2° $z \neq 0$

Wir wählen $\Delta z = r e^{i\theta} \Rightarrow \overline{\Delta z} = r e^{-i\theta}$

$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = z e^{-i2\theta} + \bar{z} + r e^{-i\theta}$

$\rightarrow \underbrace{z e^{-i2\theta} + \bar{z}}_{=: g(z, \theta)} \quad \begin{matrix} \text{Limes } r \rightarrow 0 \\ \text{jetzt } \Delta z \rightarrow 0 \end{matrix}$

validieren $\theta = 0$

$g(z, \theta) = z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$

validieren $\theta' = \pi/2$

$g(z, \theta') = -z + \bar{z} = -2i \operatorname{Im} z$

Wastaderns: f derivierbar $\bar{z}$ ist

$\Rightarrow 2 \operatorname{Re} z = -2i \operatorname{Im} z$ $2 \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \operatorname{Im} z = 0 = \operatorname{Re} z \Rightarrow z = 0$

Wir f ist able derivierbar $\bar{z}$ ist.

$$3a) \cosh z = 1/2, \quad z = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x = 1/2$$

$$\Rightarrow \sin y \sinh x = 0$$

$$\Leftrightarrow y = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{then} \quad x = 0$$

$$1^o \quad x = 0 \Rightarrow \cosh x = 1$$

$$\Rightarrow \cos y = 1/2$$

$$\Rightarrow y = \pm \pi/3 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2^o \quad y = n\pi \Rightarrow \cos y = \pm 1$$

$$\Rightarrow \cosh x = \pm 1/2 \quad \text{or} \quad x = \pm \ln \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Thus} \quad \cosh z = 1/2 \Leftrightarrow z = \pm \pi/3 i + 2\pi n i, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$b) \cos z \in \mathbb{R}, \quad z = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \sinh y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{then} \quad y = 0$$

$$\sin z \in \mathbb{R}, \quad z = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \cos x \sinh y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = (n + 1/2)\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{then} \quad y = 0$$

$$4. \quad \operatorname{Re} \cos z = \cos x \cosh y =: u(x, y)$$

$$u_x = -\sin x \cosh y, \quad u_{xx} = -\cos x \cosh y$$

$$u_y = \cos x \sinh y, \quad u_{yy} = \cos x \cosh y$$

$$\Rightarrow \Delta u = 0$$

$$\operatorname{Im} \cos z = \cos x \sinh y =: v(x, y)$$

$$v_x = -\sin x \sinh y, \quad v_{xx} = -\cos x \sinh y$$

$$v_y = \cos x \cosh y, \quad v_{yy} = \cos x \sinh y$$

$$\Rightarrow \Delta v = 0$$

$$5. a) \cos(10i) = \overbrace{\cos(0)}^{=1} \cosh(10) - i \underbrace{\sin(0)}_{=0} \sinh(10)$$

$$= \cosh(10)$$

$$b) \cos(\pi + i\pi) = \overbrace{\cos(\pi)}^{=-1} \cosh(\pi) - i \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \sinh(\pi)$$

$$= -\cosh(\pi)$$

$$c) \cosh(-2 + 2i) = \cos 2 \cosh(-2) + i \sin 2 \sinh(-2)$$

$$= \cos 2 \cosh 2 - i \sin 2 \sinh 2$$