



Mat-1.1413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 6

Harjoitukset viikolla 42, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoitustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan omaan ryhmään assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkit nippuum, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin nimen, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!

Huom! Ensimmäisen osatentti pidetään tiistaina 25.10. kello 16-20.

1) **(kt)** Ratkaise systeemi

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -8y_1 - 2y_2 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

2) **(kt)** Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 5y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = y_1 + 5y_2, \\ y_1(0) = -3 \text{ ja} \\ y_2(0) = 7. \end{cases}$$

3) **(kt)** (a) Laske funktion

$$e^{-t}(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n)$$

Laplace-muunnos.

(b) Käänteismuunna

$$\mathcal{L}(f) = \frac{s}{s^2 + s + \frac{1}{2}}.$$

4) **(ht)** Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_2 + \cos(t) - \sin(t) \\ \dot{y}_2 = -y_1 + \cos(t) + \sin(t) \\ y_1(0) = -1 \\ y_2(0) = -6 \end{cases}$$

5) **(ht)** Etsi seuraavien yhtälöiden kriittiset pisteet ja määritä niiden tyyppi. Käytä hyväksesi vastaavaa systeemiä ja linearisointia.

(a) $y'' + 4y - 5y^3 + y^5 = 0$

(b) $y'' + \cos(y) = 0$

6) **(ht)** Määritä linearisoimalla systeemin

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - y \sin(x) \end{cases}$$

stabiilisuus origossa.

7) **(ht)** (a) Laske funktion $(t+1)^2 e^t$ Laplace-muunnos.

(b) Olkoon

$$f(t) = \begin{cases} k, & \text{kun } 1 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases},$$

missä $k > 0$ on vakio. Laske funktion f Laplace-muunnos.

8) **(ht)** (a) Käytä hyväksesi tietoa, että

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s),$$

ja Laplace-muunna $t^2 \sin(\omega t)$.

(b) Käytä lisäksi tietoa, että

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)ds,$$

ja Laplace-käänteismuunna

$$\ln \frac{s+a}{s+b}.$$

9) **(ht)** Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

alkuehdolla

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mat - 1.413 C3

Malliratkaisut, harj. 6

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -8y_1 - 2y_2 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \dot{y} = Ay$$

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -8-\lambda & -2 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-8-\lambda)(-4-\lambda) + 4 = 32 + 8\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 4 \\ &= \lambda^2 + 12\lambda + 36 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 36}}{2} = -6$$

$$\lambda_1 = -6$$

$$\lambda_2 = -6$$

$$\lambda_1:$$

$$0 = (A - \lambda I)x^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1^{(1)} = x \\ x_2^{(1)} = -x \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Muita lin. riippumattomia ominaisvektoreita ei ole.

Etsitään $\lambda = -6$:een liittyvä invariantti aliaravuus

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} (A - \lambda I)^k \text{sp}(x^{(1)})$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2(\xi_1 + \xi_2) = x \\ 2(\xi_1 + \xi_2) = -x \end{cases}$$

Totalsumme, kann $x = -2(\xi_1 + \xi_2)$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} (A - \lambda I)^{-k} \operatorname{sp}\{x^{(k)}\} = \mathbb{R}^2, \quad n = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

Eigenschaften $x^{(k)}$ s.d. $(A - \lambda I)x^{(k)} = x^{(k-1)}, \quad k > 1$
 $k \leq n = 2$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \xi_1^{(2)} = -\frac{1}{4} \\ \xi_2^{(2)} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad x^{-1} = -2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = x \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A = x \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} x^{-1}$$

$$e^{tA} = x e^{\begin{bmatrix} t\lambda & t \\ 0 & t\lambda \end{bmatrix}} x^{-1} = e^{t\lambda} x e^{\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} x^{-1}$$

$$= e^{t\lambda} x \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^{-1} = e^{t\lambda} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{t\lambda} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 2t & -\frac{1}{2} - 2t \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = e^{-6t} \begin{bmatrix} 1 - 2t & -2t \\ -2t & 1 + 2t \end{bmatrix}$$

$$y = e^{tA} c = e^{-6t} \begin{bmatrix} 1 - 2t & -2t \\ -2t & 1 + 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 e^{-6t} \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ -2t \end{bmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{bmatrix} -2t \\ 1 + 2t \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 5y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = y_1 + 5y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = -3 \\ y_2(0) = 7 \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)^2 - 1$$

$$\lambda = 5 \pm 1$$

$$\lambda_1 = 6$$

$$\lambda_2 = 4$$

$$\lambda_1:$$

$$0 = (A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\lambda_2:$$

$$0 = (A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad X^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = X \Lambda X^{-1}$$

$$y = e^{tA} y_0 = X e^{t\Lambda} X^{-1} y_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{6t} \\ -5e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{6t} - 5e^{4t} \\ 2e^{6t} + 5e^{4t} \end{bmatrix}$$

3 a,

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} t^k e^{-(s+1)t} dt$$

$$\left[\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^k e^{-\alpha t} dt &= \int_0^{\infty} t^k - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} - \int_0^{\infty} k t^{k-1} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} dt \\ &= \frac{k}{\alpha} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-\alpha t} dt \quad \text{ind.} = \frac{k!}{\alpha^k} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{k!}{\alpha^{k+1}} \end{aligned} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(s+1)^{k+1}}$$

b,

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{s}{s^2 + s + \frac{1}{2}} = \frac{s + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\int_0^{\infty} \cos(\alpha t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}) e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{i\alpha - s} e^{(i\alpha - s)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{-i\alpha - s} e^{(-i\alpha - s)t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{s - i\alpha} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + i\alpha} = \frac{1}{2} \frac{s + i\alpha + s - i\alpha}{s^2 + \alpha^2} = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

$$\int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2i} (e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}) e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \frac{1}{i\alpha - s} e^{(i\alpha - s)t} dt - \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \frac{1}{-i\alpha - s} e^{(-i\alpha - s)t} dt$$

$$= \frac{i}{2} \frac{1}{i\alpha - s} - \frac{i}{2} \frac{1}{i\alpha + s} = \frac{i}{2} \frac{i\alpha + s + i\alpha - s}{-\alpha^2 - s^2} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

$$\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) e^{-\frac{1}{2}t} e^{-st} dt = \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\int_0^{\infty} -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}t\right) e^{-\frac{1}{2}t} e^{-st} dt = \frac{-\frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + s + \frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)$$