



Mat-1.413, Matematiikan peruskurssi C3

Harjoitus 5

Harjoitukset viikolla 41, 2005. **kt**=kotitehtävä, **ht**=harjoustehtävä.

Kotitehtävät palautetaan oman ryhmän assistentille loppuviikon laskuharjoituksissa.

Käytä paperikokoa A4 ja nido arkki nippuun, jos palautat useamman kuin yhden.

Muista laittaa kotitehtäväpaperiin nimi, opiskelijanumero ja harjoitusryhmä!

- 1) **(kt)** Laske e^A , e^B , $e^A e^B$ ja e^{A+B} , kun

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 2) **(kt)** Ratkaise Kreyszin menetelmällä $\dot{y} = Ay$, missä

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- 3) **(kt)** Määrittää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

kolmas rivi siten, että sen karakteristinen polynomi toteuttaa

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6.$$

- 4) **(ht)** Näytä, että $n \times n$ -matriisin A karakteristiselle polynomille $p(\lambda)$ pätee

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

missä λ_i on ominaisarvo.

Osoita tämän avulla, että $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ ja $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Vihje: Mieti, miten polynomin $p(\lambda)$ vakiotermi ja toiseksi korkeimman asteen termi muodostuvat.

- 5) **(ht)** Ratkaise alkuarvoproblema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= 6y_1 + 9y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1 + 6y_2 \\ y_1(0) &= -3 \text{ ja} \\ y_2(0) &= -3. \end{cases}$$

Mikä on dynaaminen tyyppi?

- 6) **(ht)** Ratkaise matriisieksponentilla $\dot{y} = Ay$, missä

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mikä on dynaaminen tyyppi? Onko systeemi stabiili? Asymptootisesti stabiili?

- 7) **(ht)** Millä parametrin k arvoilla origo on nidu differentiaaliyhtälösystemille $\dot{x} = Ax$, kun

(a)

$$A = \begin{pmatrix} a & -k \\ k & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ ja}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

- 8) **(ht)** Ratkaise

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -5t^2 + 6t + 25 \\ -t^2 + 2t + 4 \end{pmatrix}$$

alkuehdolla

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- 9) **(ht)** Ratkaise $\dot{x} = Ax$, kun

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

①

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A, B OVAТ NIKPOTENTTEJA : $A^2 = 0$
 $B^2 = 0$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

$$= I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^B = I + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^A e^B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{A+B} = \exp \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh(1) & i \sinh(1) \\ i \sinh(1) & \cosh(1) \end{bmatrix}$$

②

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \dot{y} = Ay$$

⑤: sta saadaan $\lambda = -2 \pm 2i$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = X e^{t\Lambda} X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t(-2+2i)} & 0 \\ 0 & e^{t(-2-2i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t(-2+2i)} & -ie^{t(-2+2i)} \\ e^{t(-2-2i)} & ie^{t(-2-2i)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{t(-2+2i)} + e^{t(-2-2i)} & -ie^{t(-2+2i)} + ie^{t(-2-2i)} \\ ie^{t(-2+2i)} - ie^{t(-2-2i)} & e^{t(-2+2i)} + e^{t(-2-2i)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2t} \cdot 2 \cos(2t) & ie^{-2t} (-2i \sin(2t)) \\ ie^{-2t} (2i \sin(2t)) & e^{-2t} \cdot 2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$= e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$

e^{tA} :n pystyvektorit ovat yhtälön $\dot{y} = Ay$ ratkaisuja ($\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$), joten yleiseksi ratkaisuksi saadaan.

$$y = C_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \cos(2t) \\ -e^{-2t} \sin(2t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \sin(2t) \\ e^{-2t} \cos(2t) \end{pmatrix}$$

③.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ a & b & c-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & c-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2(c-\lambda) + \lambda b + a$$

$$= -\lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda + a$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$$

$$\Rightarrow a=6, b=5, c=6$$